Bab 6: Analisa Spektrum

1 Analisa Spektrum Dengan DFT

Tujuan Belajar 1

Peserta dapat menghubungkan DFT dengan spektrum dari sinyal hasil sampling sinyal waktu kontinue.

N-point DFT dari sinyal x(n) adalah X(ω) yang dievaluasi pada frekuensi-frekuensi $\omega k = 2\pi k/N$ untuk k=0,1,…,N-1

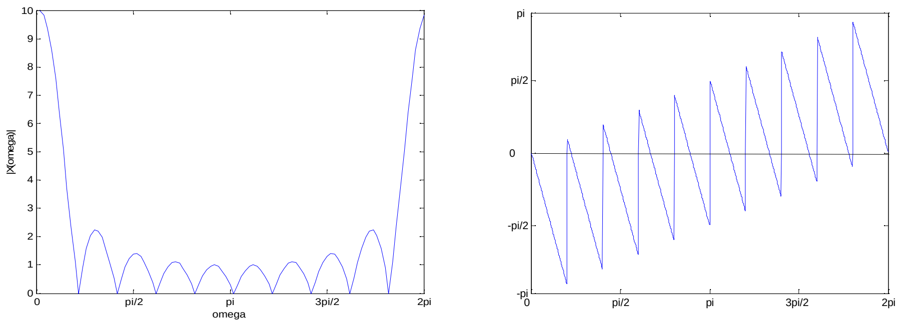
Contoh :

Sinyal dengan durasi sepanjang L diberikan sebagai berikut :

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & lainnya \end{cases}$$

Transformasi Fourier dari sinyal ini adalah

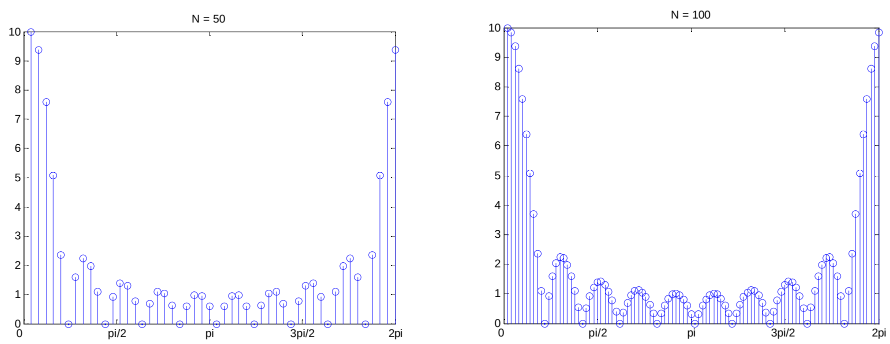
$$X(w) = \sum_{n=0}^{n=L-1} x(n) e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{n=L-1} e^{-jwn} = \frac{1-e^{-jwL}}{1-e^{-jw}} = \frac{\sin(wl/2)}{\sin(w/2)} e^{-jw(L-1)/2}$$

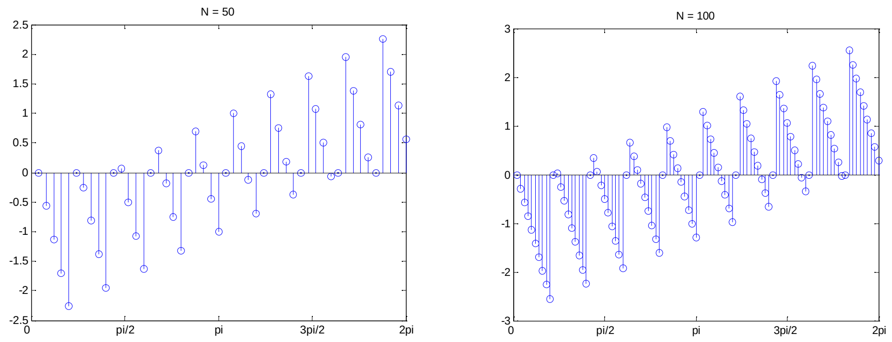


Gambar 6.1 : Karakteristik magnituda dan fasa hasil transformasi Fourier

N-point DFT dari sinyal diatas adalah

$$X(k) = \sum_{n=0}^{n=L-1} e^{-j2pkL/N} = \frac{1-e^{-j2pkL/N}}{1-e^{-j2pkL/N}} = \frac{\sin(pkL/N)}{\sin(pk/N)} e^{-jpk(L-1)/N}$$





Gambar 6.2 : Magnituda dan fasa N-point DFT untuk N=50 dan N=100

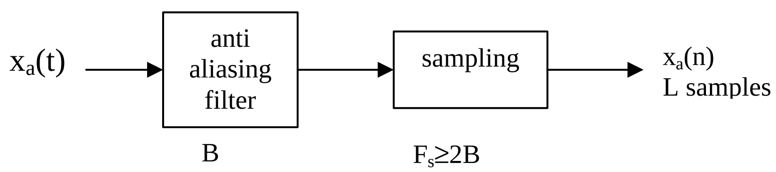
Tujuan Belajar 2

Peserta dapat melakukan analisa spektrum dengan DFT, termasuk konsep windowing

Untuk menghitung spektrum sinyal, baik sinyal waktu kontinyu maupun sinyal waktu diskrit, maka perlu diketahui besarnya sinyal setiap saat. Namun, secara praktis, kita mengamati sinyal hanya dalam selang waktu tertentu. Akibatnya, spektrum sinyal harus didekati menggunakan sejumlah data yang berhingga.

Misalkan,

1.



2. Durasi $x_a(t) = T_o \geq T$ dimana $T = 1/F_s$

   $\Rightarrow$ kemampuan membedakan frekuensi terbatas ke $\Delta F = \dfrac{1}{F_s}$

   bila $x_a(t)$ lebih panjang dari T_o, tetapi kita "memaksa" diri menggunakan blok sebesar L samples, maka gunakan window $\omega(n)$ berdurasi L

   $$\hat{x}(n) = x(n)w(n)$$

   misal $w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & lainnya \end{cases}$

   maka $\hat{x}(n)$ berdurasi L, gunakan pada DFT

Misalkan x(n) mengandung frekuensi tunggal ω_0

$$x(n) = \cos \omega_0 n$$

maka transformasi Fourier x(n) dapat dinyatakan

$$\hat{X}(w) = \tfrac{1}{2}\left[W(w - w_0) + W(w + w_0)\right]$$

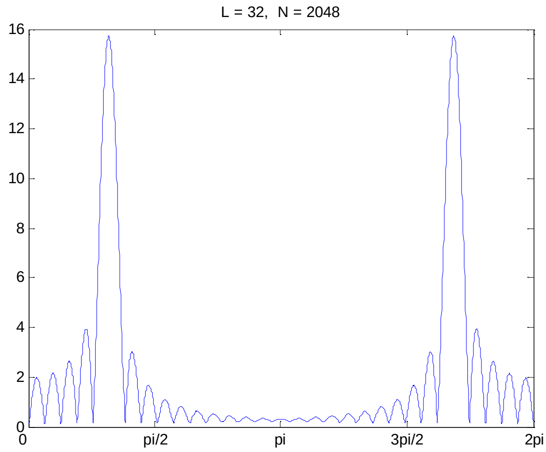
dimana W(ω) adalah transformasi Fourier dari sekuen window, dimana untuk rectangular window

$$W(w) = \frac{\sin(wL/2)}{\sin(w/2)} e^{-jw(l-1)/2}$$

Tujuan Belajar 3

Peserta mengerti zero padding dan persamaan/perbedaan akibatnya dibanding dengan menaikkan point DFT.

$\hat{X}(w)$ dihitung menggunakna DFT. Jika diinginkan menghitung N-points DFT dimana N > L maka dapat dilakukan zero padding, yaitu dengan menyisipkan sejumlah (N–L) buah nol pada sekuen { $\hat{x}(n)$ }. Gambar dibawah memperlihatkan magnituda spektrum untuk L=25 dan N=2048. Seperti terlihat pada gambar tersebut, spektrum $\hat{X}(w)$ tidak terlokalisir pada satu frekuensi tetapi menyebar ke seluruh range frekuensi. Jadi, daya dari sinyal x(n) yang sebelumnya terkonsentrasi pada satu frekuensi sekarang tersebar ke seluruh range frekuensi, atau disebut *leakage*.



Tujuan Belajar 4

Peserta dapat mengurangi kebocoran spektrum (*spektral leakage*)

Windowing, selain menyebabkan kesalahan estimasi spektrum sinyal karena leakage, juga mengurangi resolusi spektrum. Misalkan terdapat sinyal terdiri dari dua frekuensi :

$$x(n) = \cos\omega_1 n + \cos\omega_2 n$$

dengan menggunakan windowing, maka

$$\rightarrow \hat{x}(n) = w_n x(n)$$

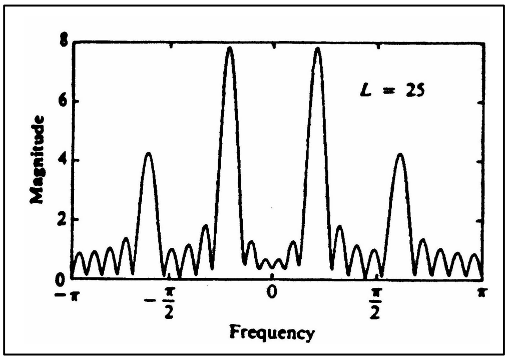
dimana transformasi Fouriernya adalah :

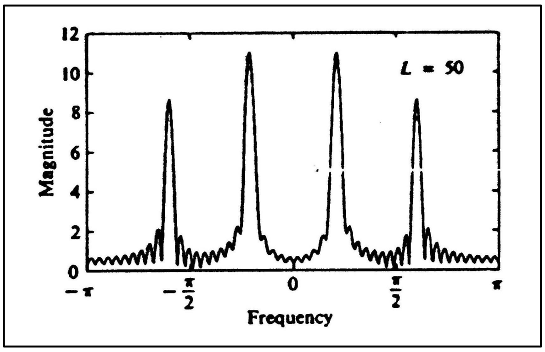
$$X(w) = \frac{1}{2}\left[W(w-w_1) + W(w-w_2) + W(w+w_1) + W(w+w_2)\right]$$

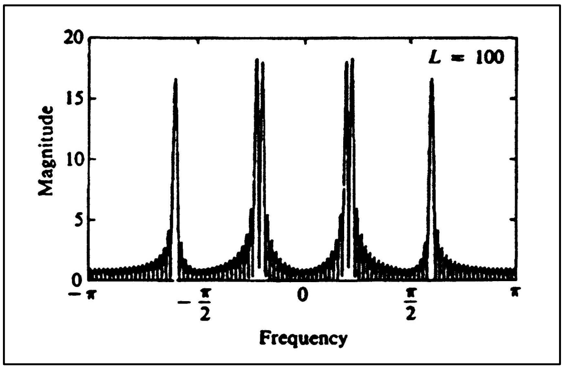
Zero crossing $W(\omega)$ terjadi pada $\omega = 2\pi/L$, bila $|\omega_1-\omega_2| < 2\pi/L$ maka terjadi overlap pada $W(\omega-\omega_1)$ dan $W(\omega-\omega_2)$, jika $|\omega_1-\omega_2| \geq 2\pi/L$ maka muncul 2 lobe. Jadi kemampuan meresolusi garis spektrum ditentukan oleh lebar main-lobe dari window.

Contoh :

$x(n) = \cos 0.2\pi n + \cos 0.22\pi n + \cos 0.6\pi n$







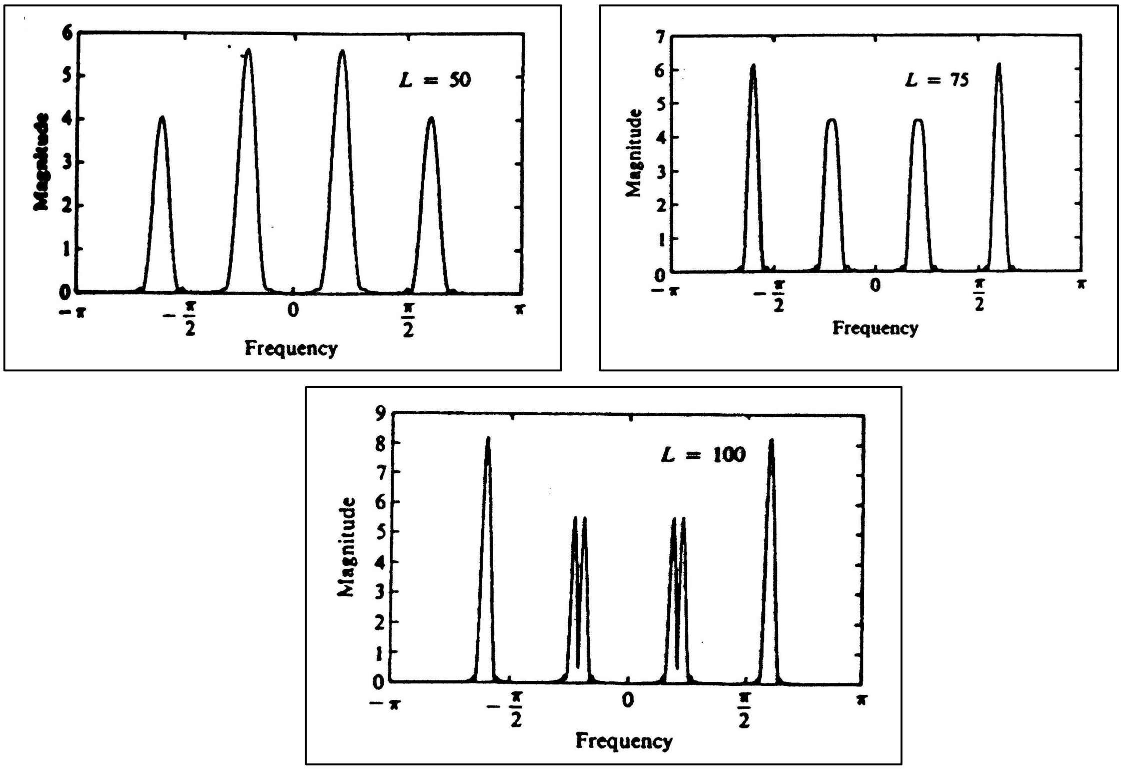
Terdapat dua frekuensi yang saling berdekatan, yaitu 0.2π dan 0.22π. Kedua frekuensi tidak bisa dipisahkan menggunakan L=25 dan L=50, kedua frekuensi baru terpisah menggunakan L = 100.

Untuk mengurangi kebocoran dapat digunakan window w(n) dengan side-lobe yang rendah yang berakibat main-lobe melebar (resolusi meningkat). Bila spektrum window relatif sempit dibanding $X(\omega)$ maka efek smoothing kecil, sebaliknya bila spektrum window relatif lebar maka efek $W(\omega)$ lebih dominan sehingga harus dihindari.

Contoh :

Hanning Window $$w(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2p}{L-1}n\right) & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

yang digunakan pada sinyal seperti diatas. Perhatikan gambar dibawah, menggunakan Hanning window.



2 Menghitung DFT Dengan bantuan Filter

Tujuan Belajar 5

Peserta dapat menghitung DFT dengan bantuan filter linier dan diterapkan dalam kasus Goertzel Algorithm untuk DMTF.

Algoritma Goertzel memanfaatkan sifat periodik sudut fasa $\{W_N^k\}$ sehingga perhitungan DFT dapat dinyatakan sebagai operasi linear filtering dengan resonator pada $\omega_k = 2\pi k/N$ Karena $W_N^{-kN} = 1$, maka dapat digunakan sebagai faktor pengali, sehingga

$$X(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{km} = W_N^{-kN} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{km}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{-k(N-m)} = y_k(n)\big|_{n=N}$$

bila $y_k(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) h_k(n-m)$

$h_k(n) \equiv W_N^{-kn} u(n)$

x(m) $\longrightarrow$ $\boxed{H_k(n)}$ $\longrightarrow$ → tunggu sampai n = N

$\rightarrow y_k(N) = X(k)$

Ctt.

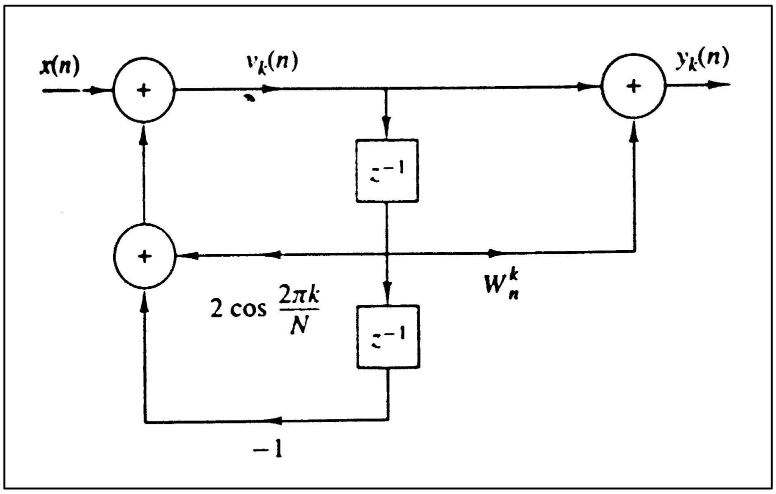
$$H_k(z) = \frac{1}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

$$\Rightarrow y_k(n) = W_N^{-k} y_k(n-1) + x(n) \qquad y(-1) = 0$$

Untuk menghindari bilangan kompleks akibat W_N^{-k}, buat komplex conjugate $\rightarrow$

$$\times \frac{\left(1 - W_N^{k} z^{-1}\right)}{\left(1 - W_N^{k} z^{-1}\right)} H_k(z)$$

sehingga $\qquad H(k) = \dfrac{1 - W_N^{k} z^{-1}}{1 - 2\cos\left(2p\,\frac{k}{N}\right) z^{-1} + z^{-2}}$



$$v_k(n) = 2\cos\frac{2pk}{N} v_k(n-1) - v_k(n-2) + x(n)$$

$$y_k(n) = v_k(n) - W_N^{k} v_k(n-1)$$

input real $\rightarrow X(k) = N(N-k)$ baik untuk M values $\leq \log_2 N$

sehingga cukup menghitung

$$|y_k(n)|^2 \Rightarrow \left|v_k(N) - W_N^{k} v_k(N-1)\right|^2$$

$$= v_k^2(N) + v_k^2(N-1) - \left(2\cos 2p\,\frac{k}{N}\right) v_k(N-1)$$