Bab 5: Discrete Fourier Transform dan FFT

1 Discrete Fourier Transform (DFT)

1.1 Definisi

Tujuan Belajar 1

Peserta dapat mendefinisikan DFT, dan menghitungnya.

Untuk melakukan analisis frekuensi dari sinyal waktu diskrit x(n) maka perlu mendapatkan representasi domain frekuensi dari sinyal yang biasanya dinyatakan dalam domain waktu. DFT digunakan untuk melakukan analisa frekuensi dari sinyal waktu diskrit.

$x(n) \xleftrightarrow{NPoint\ DFT} X(k)$ dimana n = 0, …N-1 dan k = 0, …N-1

DFT dihitung menggunakan persamaan :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad \text{dimana} \quad W_N = e^{-j\frac{2p}{N}}$$

sehingga

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2p\left(\frac{k}{N}\right)n}$$

Invers DFT (IDFT) menghitung kembali representasi sinyal waktu diskrit x(n) dari sinyal yang dinyatakan dalam domain frekuensi X(ω).

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2p\left(\frac{k}{N}\right)n}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$$

dimana

$W_N = e^{-j\frac{2p}{N}} \rightarrow$ akar ke N dari unity

Tujuan Belajar 2

Peserta dapat memandang DFT sebagai transformasi linier dan perkalian matriks terhadap vektor.

DFT dan IDFT dapat juga dipandang sebagai transformasi linier antara x(n) dan X(k), jadi

$$\overline{x_N} \leftrightarrow \overline{X_N}$$

dimana x_N dan X_N masing-masing adalah vektor dengan n buah elemen

$$\overline{x_N} = \begin{bmatrix} x(0) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \qquad \overline{X_N} = \begin{bmatrix} X(0) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}$$

Jika dinyatakan matriks W_N

$$\overline{W_N} = \left[w_{ij} = W_N^{(i)(j)} \right]$$

maka, N point DFT dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\overline{X_N} = \overline{W_N}\,\overline{x_N}$$

sedangkan IDFT dapat dihitung jika terdapat invers dari W_N.

$$\overline{x_N} = \overline{W_N^{-1}}\,\overline{X_N} \quad \text{bila } W_N^{-1} \quad \text{exist}$$

Contoh:

Hitung 4 point DFT dari sinyal x(n) = (0 1 2 3)

$$\overline{W_4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ 1 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix}$$

ingat $W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

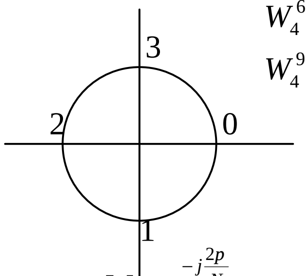
$$\rightarrow \overline{X_4} = W_4 \bar{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2+2j \\ -2 \\ -2-2j \end{bmatrix}$$

Ingat $W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$

$W_4^4 = 1$

$W_4^6 = -1$

$W_4^9 = j$



$W = e^{-j\frac{2p}{N}}$

1.2 Hubungan DFT dengan Spektrum

Tujuan Belajar 3

Peserta dapat menghubungkan DFT dengan deret Fourier untuk sinyal periodik.

Misalkan $x_p(n)$ adalah sinyal periodik dengan perioda N, maka dapat dinyatakan

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{j2p\left(\frac{k}{N}\right)n}$$

di mana $C_k = \dfrac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j2p\left(\frac{k}{N}\right)n}$

bila ambil x(n) = x_p(n) untuk n = 0, …N-1 (satu perioda)

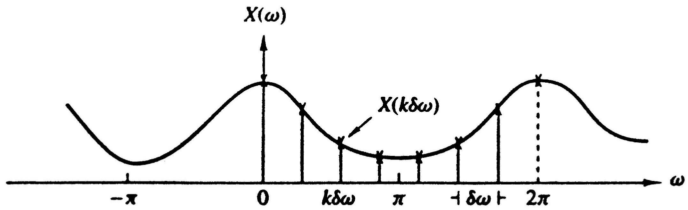
maka $C_k = \dfrac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2p\left(\frac{k}{N}\right)n}$ yang tidak lain adalah X(k).

Tujuan Belajar 4

Peserta dapat menghubungkan DFT dengan spektrum dari sinyal aperiodik.

Bila $x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN)$ $\rightarrow$ x_p(n) periodik dengan periode N

$$X\left(\frac{2p}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2p\left(\frac{k}{N}\right)n}$$



$$= \ldots + \sum_{n=-N}^{-1} x(n) e^{-j2p\left(\frac{k}{N}\right)n} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2p\left(\frac{k}{N}\right)n} + \ldots$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x(n) e^{-j2p\left(\frac{k}{N}\right)n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN)\right] e^{-j2p\left(\frac{k}{N}\right)n} = FT\left[x_p(n)\right]_{w=2pk/N}$$

bila $\hat{x}(n) = \begin{cases} x_p(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

maka $FT(x(n))\big|_{w=2pk/N} = X\left(\frac{2p}{N}k\right) = DFT\left[\hat{x}(n)\right] = X(k)$

jadi $x(n) \rightarrow x_p(n) \rightarrow \hat{x}(n)$

hanya bila x(n) finite duration L ≤ N maka $x(n) = \hat{x}(n)$ sehingga IDFT {X(k)} = x(n)

1.3 Hubungan DFT Dengan Transformasi z

Tujuan Belajar 5

Peserta dapat menghubungkan DFT dengan transformasi *z* dari sinyal (Langrange interpolator).

$$X(k) = X(z)\Big|_{z=e^{j2p\frac{k}{N}n}}$$

bila durasi x(n) ≤ N maka

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

$$= \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1-e^{j2p\frac{k}{N}} z^{-1}}$$

$$\rightarrow X(w) = X(z)\Big|_{z=e^{jw}} = \frac{1-e^{-jwN}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1-e^{-j(w-2pk/N)}}$$

$\rightarrow$ Lagrange Interpolation

2 Sifat DFT

Tujuan Belajar 6

Peserta mengerti dan dapat memanfaatkan sifat linier, periodik dan simetri sirkular.

Sifat linier :

Jika

x1(n) ← N-DFT → X1(k)

dan

x2(n) ← N-DFT → X2(k)

maka untuk sebarang konstanta a1 dan a2 real atau kompleks

a1.x1(n) + a2.x2(n) ← N-DFT → a1.X1(k) + a2.X2(k)

Sifat periodik :

Jika x(n) ← N-DFT → X(k)

maka

x(n + N) = x(n) untuk semua n

X(k + N) = X(k) untuk semua k

Sifat simetri sirkular

3 Filter Menggunakan DFT

Tujuan Belajar 7

Peserta dapat melakukan filtering linier dengan DFT, dan membandingkannya dengan konvolusi.

$x(n) \leftrightarrow X(\omega)$
$h(n) \leftrightarrow H(\omega)$
$y(n) \leftrightarrow Y(\omega)$

$X(\omega) \rightarrow \boxed{H(\omega)} \rightarrow Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$

Assumsikan FIR dan Finite duration

Let : $x(n) = 0$, $n < 0$ dan $n \geq L$
$\rightarrow$ durasi L
$h(n) = 0$, $n < 0$ dan $n \geq M$
$\rightarrow$ durasi M

$Y(\omega) = H(\omega)\, X(\omega)$ durasi : L + M- 1

Bila $Y(\omega)$ disample maka sampling harus $N \geq L + M - 1$

agar $y\left(\frac{2pk}{N}\right) \xleftrightarrow{IDFT} y(n)$

maka $Y(k) = Y(w)\Big|_{w=\frac{2pk}{N}}$ k = 0, …, N-1

$$\rightarrow Y(k) = X(k)H(k), \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$\downarrow \quad \downarrow \qquad N \geq L + M + 1$$

zero padding

$$\rightarrow Y(k) \xleftrightarrow{IDFT} y(n)$$

Contoh :

FIR : $h(n) = \{1, 2, 3\}$
$X(n) = \{1, 2, 2, 1\}$
Cari output dengan menggunakan DFT dan IDFT

L = 4, M =3 $\rightarrow$ N = 6
Pilih N = 8 (agar sesuai dengan FFT)

$$H(k) = \sum_{n=0}^{7} k(n) e^{-j2p\left(\frac{k}{8}\right)n}$$

$$H(k) = 1 + 2e^{-j2p\frac{k}{8}} + 3e^{-j2p\frac{k}{4}} + 2e^{-j2p\frac{3k}{8}}, \quad k = 0,...,7$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{7} h(n) e^{-j2p\left(\frac{k}{8}\right)n}$$

$$= 1 + 2e^{-jp\frac{k}{8}} + 2e^{-jp\frac{k}{4}} + 2e^{-jp\frac{3k}{8}}, \quad k = 0,...,7$$

$X(0) = 6$ $\qquad X(1) = \frac{2+\sqrt{2}}{2} + j\left(\frac{4+3\sqrt{2}}{2}\right)$

$X(2) = -1 - j$ $\qquad X(3) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + j\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2}\right)$

$X(4) = 0$ $\qquad X(5) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + j\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2}\right)$

$X(6) = -1 + j$ $\qquad X(7) = \frac{2+\sqrt{2}}{2} + j\left(\frac{4+3\sqrt{2}}{2}\right)$

$H(0) = 6$ $\qquad H(1) = \left(1+\sqrt{2}\right) - j\left(3+\sqrt{2}\right)$

$H(2) = -2 - j2$ $\qquad H(3) = \left(1-\sqrt{2}\right) + j\left(3-\sqrt{2}\right)$

$H(4) = 2$ $\qquad H(5) = \left(1-\sqrt{2}\right) - j\left(3-\sqrt{2}\right)$

$H(6) = -2 + j2$ $\qquad H(7) = \left(1+\sqrt{2}\right) + j\left(3+\sqrt{2}\right)$

Y(k) = H(k) X(k)

Y(0) = 36 Y(1) = -14.07 - j17.48

Y(2) = j4 Y(3) = 0.07 + j0.515

Y(4) = 0 Y(5) = 0.07 - j0.515

Y(6) = -j4 Y(7) = -14.07 + j17.48

→ IDFT

$$y(n) = \sum_{k=0}^{7} Y(k) e^{j2p\left(\frac{k}{8}\right)n} \qquad n = 0, 1, \ldots, 7$$

→ y(n) = {1, 4, 9, 11, 8, 3, 0, 0}

↓↓

zeropad akibat 8 point

→ seakan lebih sukar dari konvolusi tetapi akan menguntungkan bila M > 40-43

→ aliasing terjadi bila N < M + L -1

Tujuan Belajar 8

Peserta dapat melakukan filtering linier dengan DFT, untuk sinyal yang panjang, melalui metoda *overlap-save* dan *overlap-add*.

Untuk melakukan filtering sinyal panjang dapat dilakukan dengan cara Block-by-Block

- Overlap-save method
- Overlap-odd method

Asumsi FIR $\rightarrow$ durasi M
Blok $\rightarrow$ durasi L

Asumsi L >> M

- Metoda overlap-save
  N = L + M -1 $\rightarrow$ N point DFT dan IDFT

M-1 L New Data

x(n) | Old | New | $\xleftrightarrow{N-DFT} X(k)$

x(n)

Untuk blok -m

$\hat{Y}_M(k) = H(k$ M k = 0, : L-1

IDFT `

$\hat{y}_m($ h(n) | Zero Padding | .. $\xleftrightarrow{N-DFT} H(k)$

$\downarrow$ $\downarrow$

M-1 point L hasil konvolusi
datang dari old data
$\rightarrow$ buang

Untuk blok m+1

- ambil M-1 point terakhir di blok m untuk digunakan sebagai old data pada bagian berikut
- ulangi

$x_1(n) = \{0, 0, \ldots 0, x(0), x(1), \ldots x(L-1)\}$

- Overlap-add Method

4 Fast Fourier Transform (FFT)

Tujuan Belajar 9

Peserta mengerti konsep FFT dan butterfly.

Kebutuhan kalkulasi DFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \qquad W_N = e^{-j\frac{2p}{N}} = \cos\frac{2p}{N} - j\sin\frac{2p}{N}$$

karena $x(n) = x_r(n) + jx_I(n)$ bisa bernilai kompleks,
maka $X(k) = X_R(k) + jX_I(k)$

1. $$X_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[x_r(n)\cos 2p\,\frac{k}{N}n + x_I(n)\sin 2p\,\frac{k}{N}n\right]$$
2. $$X_I(k) = -\sum_{n=0}^{N-1}\left[x_R(n)\sin 2p\,\frac{k}{N}n - x_I(n)\cos 2p\,\frac{k}{N}n\right]$$

$\rightarrow$ perlu $\rightarrow$ $2N^2$ evaluasi trigonometric function
+ $\rightarrow$ $4N^2$ real multiplications
+ $\rightarrow$ 4N(N-1) real addition
+ $\rightarrow$ sejumlah indexing + addressing operators

$\rightarrow$ Sering disebut $O(N^2)$

$\rightarrow$ Gunakan fakta : $W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$ (simetri) $W_N^{k+\frac{N}{2}} = W_N^k$
untuk menekan komputasi

$\Rightarrow$ Fast algorithms tersedia untuk
$N = r_1, r_2, \ldots r_v$ di mana $\{r_j\}$ = prime

Tujuan Belajar 10

Peserta dapat menjelaskan FFT Radix-2 desimasi dalam waktu.

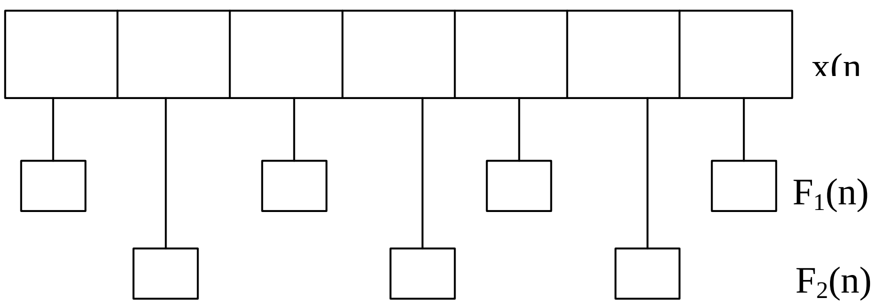
- Radix-2 FFT]
  - Kasus khusus $N = r \times r \times r \times \ldots \times r = r^v$
  - $R = 2 \rightarrow$ radix-2 FFT $\Rightarrow N = 2^v$

<u>Decimation in Time</u>

$$x(n) \xleftrightarrow{FFT} X(k)$$

1. $$x(n)\left\langle \begin{array}{ll} f_1(n) = x(2n) & n = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1 \\ f_2(n) = x(2n+1) & bagi \quad 2 \quad sequences \quad f_1, f_2 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ f_1 dan f_2 diperoleh melalui desimasi x(n)



2. $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$ k = 0, 1, …, N-1

$$= \sum_{n-even} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n-odd} x(n) W_N^{kn}$$

$$= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m) W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m+1) W_N^{k(2m+1)}$$

namun $W_N^2 = W_{N/2}$, maka

$$X(k) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_1(m) W_{N/2}^{km} + W_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_2(m) W_{N/2}^{k(2m+1)}$$

$$X(k) = F_1(k) + W_N^k F_2(k) \quad k = 0,1,...N-1$$

di mana

$F_1(k)$: N/2 point DFT dari $f_1(m)$

$F_2(k)$: N/2 point DFT dari $f_2(m)$

Karena $F_1(k)$ dan $F_2(k)$ periodik, dengan perioda N/2,

$F_1(k+N/2) = F_1(k)$ dan $F_2(k+N/2) = F_2(k)$

Juga $W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$, maka

$$X(k) = F_1(k) + W_N^k F_2(k) \qquad k = 0, \ldots (N/2)-1$$

$$X(k+\frac{N}{2}) = F_1(k) - W_N^k F_2(k) \qquad k = 0, \ldots (N/2)-1$$

Bila $G_1(k) = F_1(k)$

$G_2(k) = W_N^k F_2(k)$

$$\left.\begin{aligned} X(k) &= G_1(k) + G_2(k) \\ X(k+\frac{N}{2}) &= G_1(k) - G_2(k) \end{aligned}\right\} 2-\text{point } DFT$$

Lanjutkan

$$f_1 \left\langle \begin{aligned} V_{11}(n) &= f_1(2n) & \frac{N}{4}\ \text{points} \\ V_{12}(n) &= f_1(2n+1) & \frac{N}{4}\ \text{points} \end{aligned} \right.$$

$$f_2 \left\langle \begin{aligned} V_{21}(n) &= f_2(2n) & \frac{N}{4}\ \text{points} \\ V_{22}(n) &= f_2(2n+1) & \frac{N}{4}\ \text{points} \end{aligned} \right.$$

$$F_1(k) = V_{11}(k) + W_{\frac{N}{2}}^k V_{12}(k) \quad k \Rightarrow \frac{N}{4}\ \text{points}$$

$$F_1(k+\tfrac{N}{4}) = V_{11}(k) - W_{\frac{N}{2}}^{k} V_{12}(k) \quad k \Rightarrow \frac{N}{4}\ points$$

$$F_2(k) = V_{21}(k) + W_{\frac{N}{2}}^{k} V_{22}(k) \quad k \Rightarrow \frac{N}{4}\ points$$

$$F_2(k+\tfrac{N}{4}) = V_{21}(k) - W_{\frac{N}{2}}^{k} V_{22}(k) \quad k \Rightarrow \frac{N}{4}\ points$$

di mana $v_{ij} \longleftrightarrow V_{ij}(k)$ N/4 DFT point $\rightarrow$ O(nlogn)

- Ilustrasi untuk 8 samples

V_{11}(n) = f_1(2n)= x(4n) = {x(0), x(4)}
V_{12}(n) = f_1(2n+1) = x(2(2n+1)) = x(4n+2) ={x(2), x(4)}
V_{21}(n) = f_2(2n) = x(2(2n+1)) = x(4n+2) = {x(1), x(5)}
V_{22}(n) = f_2(2n+1) = x(2(2n+1)+1) = x(4n+3) = {x(3), x(7)}

Tujuan Belajar 11

Peserta dapat menjelaskan FFT Radix-2 desimasi dalam frekuensi.