Bab 2: Sinyal dan Sistem di Domain Waktu

1 Sinyal di Domain Waktu

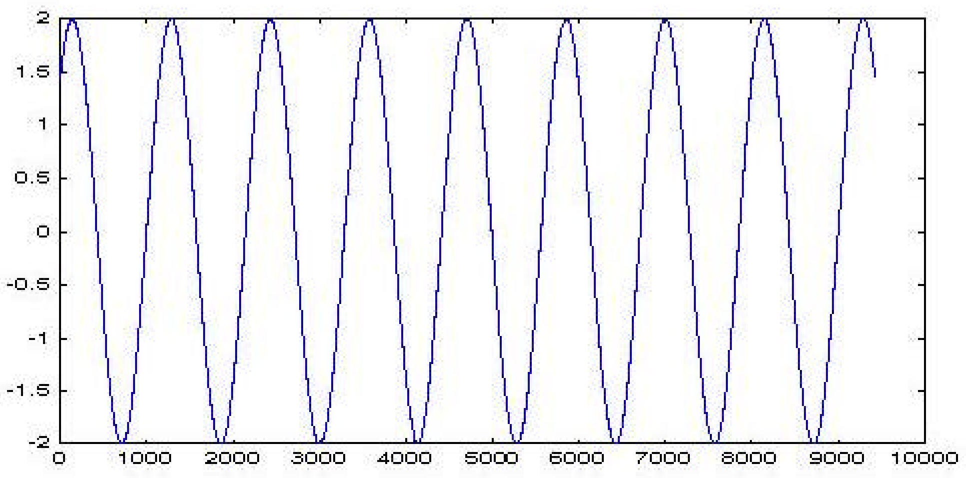
1.1 Konvensi Penulisan Sinyal

Tujuan Belajar 1

Peserta mengetahui konvensi penulisan sinyal di domain waktu, seperti bentuk grafik, fungsional, tabuler, dan deret.

Di domain waktu, sinyal dapat dituliskan ke dalam beberapa bentuk yaitu:

- Grafik atau waveform.



Gambar 1. Contoh sinyal dalam bentuk grafik atau waveform.

- Fungsional

$$x(n) = \begin{cases} 1, & \text{Untuk } n = 1, 3 \\ 4, & \text{Untuk } n = 2 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

- Tabuler

n	…	-2	-1	0	1	2	3	4	5	…
$x(n)$	…	0	0	0	1	4	1	0	0	…

- Deret

$x(n) = \{ \ldots 0, 1, 3, \ldots \}$

?n=0

1.2 Beberapa Sinyal Dasar

Tujuan Belajar 2

Peserta mengenali sinyal-sinyal dasar (elementer) seperti *unit sample*, *unit step*, *unit ramp*, *exponential*, *complex exponential*, dan *sinusoidal*, beserta notasinya.

Beberapa sinyal dasar yang penting dalam pengolahan sinyal dijital:

Unit sample (impulse)

Unit sample didefinisikan sbb.:

$$d(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases},$$

Unit step

Unit step didefinisikan sbb.:

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \mathrm{n} \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases},$$

Unit ramp

Unit ramp didefinisikan sbb.:

$$u_r(n) = \begin{cases} n & \mathrm{n} \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases},$$

Exponential

Sinyal Exponential didefinisikan sbb.:

$$x(n) = a^n \quad \forall n,$$

Complex exponential

Sinyal Complex Exponential didefinisikan sbb.:

$$a = re^{jq} \rightarrow x(n) = \left(re^{jq}\right)^n$$

$$\rightarrow x(n) = r^n(\cos qn + j\sin qn)$$

Tujuan Belajar 3

Peserta mengerti prinsip dasar *complex variable*, seperti bagian *real*, imajiner, magnituda, dan sudut dari sebuah bilangan kompleks.

Sinyal *x*(*n*) yang bernilai kompleks dapat direpresentasikan ke dalam dua bagian yaitu:

- Bagian riil:

$$x_R(n) = r^n \cos qn$$

- Bagian imajiner:

$$x_I(n) = r^n \sin qn .$$

Alternatif lain, sinyal kompleks memiliki fungsi amplituda dan fasa:

- Fungsi amplituda:

$$|x(n)| = A(n) \equiv r^n ,$$

- Fungsi fasa:

$$\angle x(n) = f(n) \equiv qn .$$

Tujuan Belajar 4

Peserta mengenali beda serta dapat mengklasifikasikan sinyal energi dengan sinyal daya. Peserta dapat mengetahui hubungan antara enersi/daya dengan periodisitas.

Sinyal energi didefinisikan melalui persamaan berikut:

$$\text{Energi} = \mathrm{E} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

jika nilai E finite, maka $x(n)$ disebut sebagai sinyal energi.

Kebanyakan sinyal yang mempunyai E infinite mempunyai daya rata-rata yang finite. Daya didefinisikan melalui persamaan berikut:

$$\text{Power} = \mathrm{P} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

$$= \lim_{N \to \infty} \mathrm{E_N} = \mathrm{E}$$

Tujuan Belajar 5

Peserta mengenal konsep sinyal simetrik (genap) dan anti simetrik (ganjil).

Sinyal $x(n)$ dikatakan simetrik (genap) jika:

$$x(-n) = x(n)$$

$$\rightarrow x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)]$$

Sinyal $x(n)$ dikatakan anti simetrik (ganjil) jika:

$$x(-n) = -x(n)$$

$$\rightarrow x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]$$

Jika kedua macam sinyal dijumlahkan maka didapat:

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

2 Sistem Pemrosesan Terhadap Sinyal

2.1 Pemrosesan Dasar

Tujuan Belajar 6

Peserta dapat melakukan operasi dasar terhadap sinyal, seperti *shift*, *folding*, *addition*, *product*, dan *scaling*.

1. *Shift*

Suatu sinyal dapat digeser waktunya dengan mengganti variable n dengan $n - k$, dengan k adalah bilang bulat yang menyatakan unit waktu pergeseran. Jika k bernilai positif maka pergeseran akan menghasilkan sinyal yang tertunda (delay). Dalam grafik hal ini ditunjukkan dengan menggeser ke kanan sejauh k. Jika k bernilai negatif maka sinyal akan lebih cepat sebesar $|k|$ (digeser ke kiri sebesar $|k|$).

2. *Folding*/*Reflection*

Operasi ini akan mencerminkan $x(n) \rightarrow x(-n)$

3. *Addition*

Jumlah dua buah sinyal pada saat yang bersamaan adalah sama dengan jumlah dari besar kedua sinyal pada saat tersebut.

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

4. *Product*

Didefinisikan melalui persamaan berikut:

$$y(n) = x_1(n)x_2(n)$$

5. *Scaling*

Mengalikan besar suatu sinyal dengan suatu konstanta A.

$$y(n) = Ax(n)$$

2.2 Deskripsi Sistem

Tujuan Belajar 7

Peserta mengetahui deskripsi input-output (I/O) $y(n)$ = T[$x(n)$] dari sistem waktu diskrit (SWD) di kawasan waktu.

Deskripsi input-output dari system waktu diskrit tediri dari ekspresi matematik atau aturan yang secara eksplisit mendefinisikan hubungan antara sinyal input dan output, dan dinyatakan dalam bentuk $y(n) = T[x(n)]$. Struktur internal suatu system berupa blackbox, sehingga sinyal berinteraksi dengan sistem melalui terminal input dan output.

Gambar 2. Hubungan input output dari sistem waktu diskrit (SWD).

Cara lain menggambarkan sistem adalah melalui suatu transformasi $y(n) = T[x(n)]$ yang dapat dijuga digambarkan sebagai

$$x(n) \overset{t}{\longleftrightarrow} y(n)$$

Contoh :

Misal input $x(n) = \begin{cases} |n| & -3 \le n \le 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

Hitung response dari

a) $y(n) = x(n)$ (sistem identitas)

$$\Rightarrow y(n) = \{\ldots, 0, +3, +2, +1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 0, \ldots\}$$

b) $y(n) = x(n–1)$

$$\Rightarrow y(n) = \{\ldots, 0, +3, +2, \underset{\uparrow}{+1}, 0, 1, 2, 3, 0, \ldots\}$$

c) $y(n) = x(n+1)$

$$\Rightarrow y(n) = \{\ldots, 0, 3, 2, 1, 0, \underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 0, \ldots\}$$

d) $y(n) = 1/3(x(n+1) + x(n) + x(n–1))$

$$\Rightarrow y(n) = \{\ldots, 0, 1, 5/3, 2, 1, \underset{\uparrow}{2/3}, 1, 2, 5/3, 1, 0, \ldots\}$$

e) $y(n) = \max \{ x(n+1), x(n), x(n–1)\}$

$$\Rightarrow y(n) = \{\ldots, 0, 3, 3, 2, \underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 3, 0, \ldots\}$$

2.3 Sistem Akumulator

Tujuan Belajar 8

Peserta mengenal persamaan I/O untuk akumulator, dan alternatif representasinya. Peserta mengenal konsep kondisi awal dan *initially relaxed* pada sistem.

Bentuk umum persamaan I/O untuk akumulator adalah sbb.:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$
$$= x(n) + x(n-1) + x(n-2) + \ldots$$

contoh:

1. Misal input $x(n) = \begin{cases} |n| & -3 \le n \le 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$,

   $\Rightarrow$ Akumulator :

   y(n) = {…,0,3,5,6,6,7,9,12,12,12,…}

   * tidak hanya input dependent

   $$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k) + x(n)$$

   $$\downarrow y(n-1)$$

   Untuk $n \ge n_o$

   $\rightarrow$ perlu kondisi awal $y(n_o - 1)$ dan input $x(n_o)$ $n \ge n_o$

   $\rightarrow$ bila $y(n_o - 1) = 0$ $\rightarrow$ initialy relaxed

   $\rightarrow$output hanya tergantung input

2. Akumulator y(n) = y(n-1) + x(n) dieksitasi oleh deret $x(n) = nu(n)$. Cari outputnya bila kondisi awal :
   a. relax (y(-1)=0)
   b. y(-1) = 1

   Jawab:

   a. $y(n) = y(-1) + \sum_{k=0}^{n} x(k)$

   $$\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \ldots + n$$

   $$\sum_{k=0}^{n} k = n + (n-1) + \ldots + 1 + 0$$

   $$2 \sum_{k=0}^{n} k = (n+1)(n) \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} k = 1/2(n)(n+1)$$

   $\Rightarrow$ y(n) = 1/2 (n)(n+1) $\quad n \ge 0$

y(n) = 1 + n(n+1)/2 = (2 + n^2+n)/2 $\quad n \ge 0$

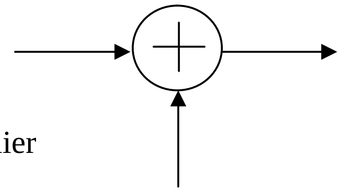
2.4 Diagram Blok dari Sistem

Tujuan Belajar 9

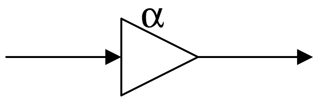
> Peserta mengerti dan dapat membuat representasi diagram blok dari SWD sebagai konfigurasi dari elemen dasar yaitu adder, constant multiplier, signal multiplier, unit delay element, dan unit advanced element.

Basic building blok :

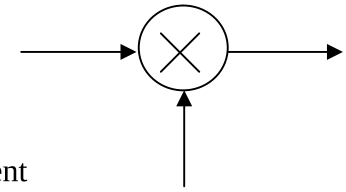
1. Adder



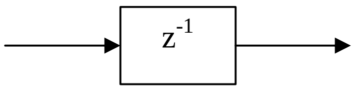
2. Constant Multiplier



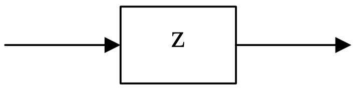
3. Signal Multiplier



4. Unit Delay Element



5. Unit Advance Element

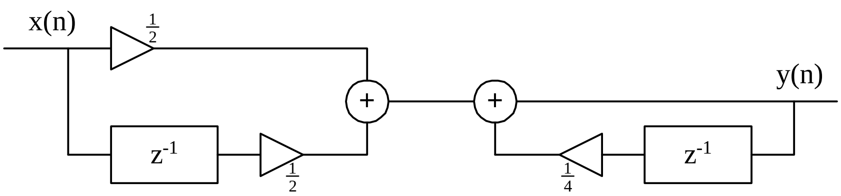


Soal:

Gambarlah diagram blok dari sistem

$$y(n) = 1/4\ y(n-1) + 1/2\ x(n) + 1/2\ x(n-1)$$

Jawab:



Gambar 3. Diagram blok dari sistem dengan koefisien tertentu.

2.5 Klasifikasi Sistem

Tujuan Belajar 10

Peserta dapat mengklasifikasikan SWD ke dalam kelompok static vs. dynamic, time invariant vs. time variant, linear vs. nonlinear, causal vs. noncausal, stable vs. unstable.

a. Static vs dynamic

Static $\downarrow$ memoryless $\downarrow$ $y(n) = nx(n) + bx^3(n)$ $\downarrow$ no delay elements

dynamic $\downarrow$ with memory :

finite: $y(n) = x(n) + 3x(n-1)$, $y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(n-k)$

infinite: $y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k)$

b. Time invariant vs time variant

$\downarrow$

$$x(n) \xrightarrow{t} y(n)$$

$$\Rightarrow x(n-k) \xrightarrow{t} y(n-k)$$

Test : $y(n,k) = t\,[x(n-k)]$

bila $y(n,k) = y(n-k) \rightarrow$ Time Invariant

Contoh :

$y(n) = x(n) \cos \omega_o n$

$y(n,k) = x(n-k) \cos \omega_o n$

$y(n-k) = x(n-k) \cos \omega_o(n-k)$

$\rightarrow$ time variant

c. Linear vs non linear

$\downarrow$

$$t\left[\sum_i a_i x_i(n)\right] = \sum_i a_i t\,[x_i(n)]$$

$\uparrow$ konstan

$$\text{test}\begin{cases} T[x_1(n) + x_2(n)] = T[x_1(n)] + T[x_2(n)] \\ T[ax_1(n)] = aT[x_i(n)] \end{cases}$$

Contoh :

- $y(n) = x_2(n)$
  $T[\alpha x_1(n)] = \alpha_2\, x_1^2(n)$
  $\alpha T[x_1(n)] = \alpha\, x_1^2(n)$

- $y(n)\, e^{x(n)} \rightarrow$ non linear

d. Causal vs non causal
   y(n) hanya tergantung dari input x(n), x(n-1), … tapi tidak tergantung dari x(n+1), x(n+2),…
   Test :
   $y(n) = x(n) + 3x(n+4) \leftarrow$ non causal
   $y(n) = x(n^2) \leftarrow$ non causal
   $y(n) = x(-n) \leftarrow$ non causal
   $y(-1) = x(1)$

e. Stable vs unstable
   Stable $\rightarrow$ BIBO
   $|x(n)| \le M_x < \infty \Rightarrow |y(n)| \le M_y < \infty$

   Test : $y(n) = y^2(n-1) + x(n)$
   Let $x(n) = C\delta(n) \leftarrow$ BI C : konstanta
   Asumsi $y(-1) = 0$
   $Y(0) = C$
   $Y(1) = C^2$
   $Y(2) = C^3 \ldots$ $y(n) = C^{2n}$ … unstable

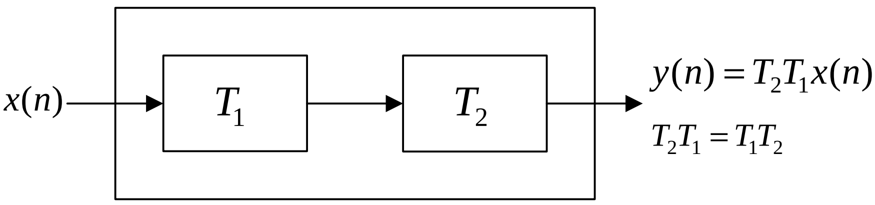
2.6 Ekstensi Sistem Melalui Rangkaian Kaskade dan Paralel

Tujuan Belajar 11

Peserta dapat mengembangkan sistem dengan merangkaikan subsistem secara paralel dan serial/kaskade. Peserta dapat menganalisa sistem dengan menguraikan sistem ke dalam subsistem.

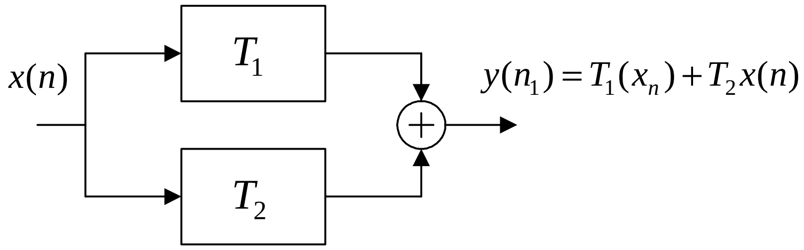
Beberapa subsistem dapat dirangkaikan menjadi satu kesatuan dengan cara cascade atau serial. Proses ini memelihara sifat linieritas.

Cascade interconnection:



Gambar 4. Kaskade dua sistem LTI.

Parallel interconnection:



Gambar 5. Sistem paralel sama dengan menjumlah dua sistem

Penggunaan:

- Parallel dan cascade untuk membangun sistem
- Pecahkan sistem untuk analisis

3 Analisa Sistem

3.1 Sistem Sebagai Pengkombinasi Linier

Tujuan Belajar 12

Peserta dapat menganalisa sistem SWD linear time invariant (LTI) melalui penguraian sinyal input ke dalam kombinasi linier dari subsinyal, memproses subsinyal, dan mengkombinasi linierkan hasilnya untuk memperoleh luaran, termasuk melalui kumpulan sinyal terhubung secara harmonis.

Ada dua cara yang dapat digunakan untuk menganalisa respons suatu sistem linear pada suatu masukan yang diberikan.

- Cara pertama menggunakan solusi langsung:

Bentuk umum solusi langsung:

y(n) = F[y(n-1), y(n-2), … y(n-N), x(n), x(n-1), … x(n-M)]

$$\Rightarrow y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

- Cara kedua memecah input dalam elemen-elemen → cek satu per satu

$$x(n) = \sum_k c_k x_k(n)$$

↑ weighting coefficients

$$y_k(n) = T[x_k(n)]$$

$$\Rightarrow y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_k c_k x_k(n)\right]$$

$$= \sum_k c_k T[x_k(n)] = \sum_k c_k y_k(n)$$

Contoh :

$x_k(n) = e^{jwkn}$, k = 0, 1, … N-1

$\rightarrow$ Harmonically related signals

$\omega_k = (2\pi/N)K$

$\uparrow$ fundamental frequency

$$\Rightarrow x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jwkn}$$

Tujuan Belajar 13

Peserta mengetahui cara menguraikan sinyal waktu diskrit ke dalam kumpulan sinyal-sinyal impuls.

misal :

$$x_k(n) = d(n-k)$$

jelas

$$x(n)d(n-k) = x(k)d(n-k)$$

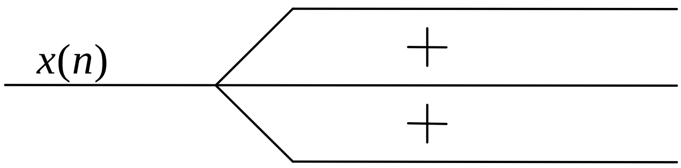
$$\Rightarrow x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)d(n-k)$$

Contoh :

X(n) = {2, 4, 0, 3}

Uraikan kedua jumlah dari weighting impulse sequence

$x(n) = 2\delta(n+1) + 4\,\delta(n) + 3\delta(n-2)$



Gambar 6.

3.2 *Konvolusi*

Tujuan Belajar 14

Peserta mengerti konsep dan dapat menghitung output dari sistem LTI melalui konvolusi respons impuls dengan sinyal input (melalui proses folding, shifting, multiplications, dan summation).

$$x(n)=d(n-k) \longrightarrow \boxed{\text{LINEAR}} \longrightarrow y(n)=h(n,k)$$

Gambar 7. Respons impuls dari sebuah sistem linier.

Misalkan :

$C_k \equiv x(k) \rightarrow C_k h(n,k) = x(k)h(n,k)$
$\uparrow$ konstanta $\uparrow y(n) = h(n,k)$
$x(n) = C_k\delta(n-k)$

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)d(n-k)\rightarrow y(n)=T[x(n)]$$
$$=T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)d(n-k)\right]$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)T[d(n-k)]$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n,k)$$

$$\longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow$$

Gambar 8. Sistem LTU adalah sistem yang sekaligus time invariant dan linier.

misal :

$$h(n)=t[d(n)]$$
$$h(n,k)=t[d(n-k)]$$
$$\rightarrow y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}v_n(k)$$

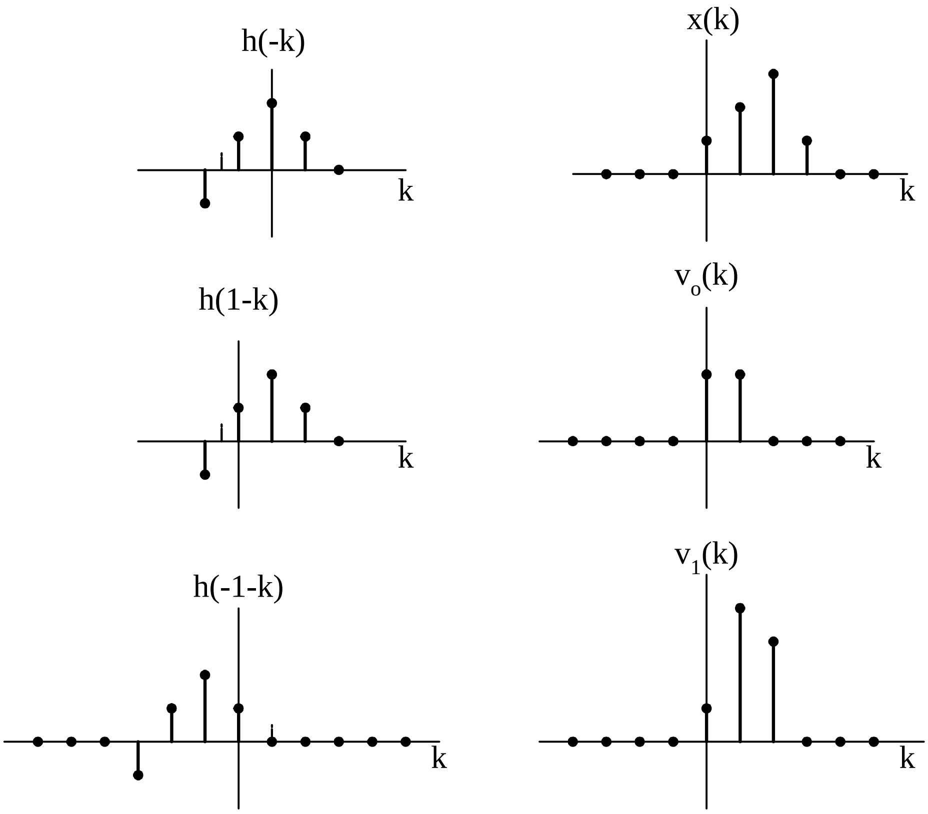
$\uparrow$ cek untuk $y(n_o)$

Jumlah konvolusi :

1. Folding h(k) $\rightarrow$ h(-k)
2. Shifting h(-k) $\rightarrow$ $h(n_o\text{-}k)$
3. Multiplication $x(k)h(n_o\text{-}k)$
4. Summation v

Soal :

h(n) = {1, 2, 1, -1}
x(n) = {1, 2, 3, 1} $\rightarrow$ y(n) = ?



Gambar 9. Ilustrasi dari proses konvolusi

y(n) = {…, 0, 0, 1, 4, 8, 8, 3, -2, -1, 0, 0, …}
bisa juga

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k)$$

di mana $m = n - k$

Tujuan Belajar 15

Peserta memahami sifat konvolusi, yakni komutatif, asosiatif, dan distributif.

Definisikan dua macam konvolusi:

$$x(n) \otimes h(n) = \sum_k x(k)h(n-k)$$

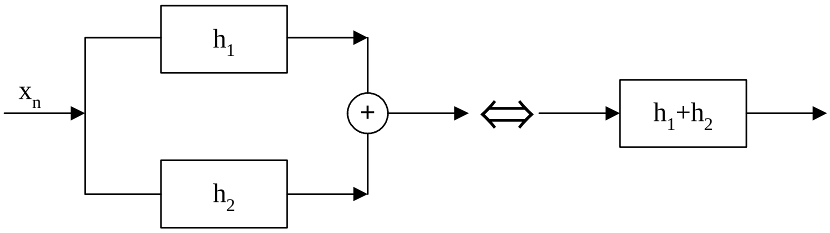
$$h(n) \otimes x(n) = \sum_k h(k)x(n-k)$$

Sifat-Sifat

→ komutatif $x(n) \otimes h(n) = h(n) \otimes x(n)$

→ asosiatif $[x(n) \otimes h_1(n)] \otimes h_2(n) = x(n) \otimes [h_1(n) \otimes h_2(n)]$ (seri atau kaskade)

$\rightarrow$ distributif $\quad x(n)\otimes[h_1(n)+h_2(n)] = x(n)\otimes h_1(n) + x(n)\otimes h_2(n)$ (paralel)



Gambar 10. Sistem paralel dapat dianggap sebagai sistem penjumlahan.

Tujuan Belajar 16

> Peserta dapat meyederhanakan proses konvolusi untuk kasus khusus sistem dan/atau sinyal kausal. Peserta dapat menghitung dengan cepat $\sum_{k=0}^{N} a^k$ dan $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$.

Untuk sistem dan atau sinyal kausal dimana h(n) = 0, n < 0; maka berlaku

$$y(n_o) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(no\text{-}k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(no\text{-}k) + \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(no\text{-}k)$$

$\uparrow$ future samples

$\Rightarrow$ Causal $y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$

$$= \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k)$$

$\longrightarrow$ both causal $y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \ldots$

Soal :

$X(n) = u(n)$
$H(n) = a^n u(n)$
Cari y(n) !

$y(n) = x(n) * h(n)$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k = a^0 + a^1 + a^2 + \ldots + a^n$$
$$= a^0 + \left(a^1 + \ldots + a^n + a^{n+1}\right) - a^{n+1}$$
$$= a^0 + a\left(a^0 + \ldots + a^n\right) - a^{n+1}$$
$$= a\sum a^k + a^0 - a^{n+1}$$
$$\sum a^k = \frac{a^0 - a^{n+1}}{1-a}$$

3.3 Stabilitas Sistem

Tujuan Belajar 17

Peserta dapat mencek stabilitas sistem LTI yang diketahui $h(n)$ nya.

Syarat stabil BIBO adalah luaran y(n) terbatas untuk masukan x(n) yang terbatas. Jika respon impuls diketahui, maka kestabilan dapat dicek dengan cara sbb.:

$$|y(n)| = \left|\sum_k h(k)x(n-k)\right|$$

$$\text{let } S_h = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \leq \sum |h(k)||x(n-k)|$$

$$\mathrm{y(n)} \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

$$\text{LTI is stable if } S_h < \infty$$

Jadi sistem LTI stabil jika S_h terhingga.

Contoh :

Tentukan harga a agar h(n) = a^nu(n) stabil!

$$S_h = \sum_{k=0}^{\infty} \left|a^k\right| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = 1 + |a| + |a|^2 + \ldots$$
$$= 1 + |a|\{1 + |a| + |a|^2 + \ldots\}$$
$$= 1 + |a|\sum_{k=0}^{\infty} |a|^k$$
$$\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = \frac{1}{1-|a|} \quad \text{bila } |a| < 1$$
$$\Rightarrow \text{stable bila } |a| \neq 1$$

Contoh :

$$h(n)=\begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ b^n & n < 0 \end{cases}$$

$$S_h = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} |b|^n$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$|a| < 1 \qquad\qquad |b| > 1$$

4 Sistem Generik

4.1 FIR dan IIR

Tujuan Belajar 18

Peserta mengenal sistem FIR dan IIR berdasarkan respons impulsnya.

Sistem FIR dan IIR dapat dikenali dengan melihat bentuk umumnya:

$$\text{FIR}: \ h(n) = 0 \ \ n < 0 \ \ \ \text{n} \geq \text{M}$$

$$\rightarrow \text{y(n)} = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

$$\text{IIR}: \ y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

Tujuan Belajar 19

Peserta mengetahui definisi sistem rekursif, non-rekursif, zero input response, natural response, zero state response, dan memori sistem dalam konteks sistem IIR.

- Sistem rekursif adalah sistem yang outputnya bergantung juga output sebelumnya.

  Y(n) = F[y(n-1), y(n-2), …, y(n-N), x(n), x(n-1), …, x(n-M)]
- Sistem non-rekursif adalah sistem tidak bergantung output sebelumnya
  Y(n) = f[(x(n), x(n-1), …, x(n-M)]
- Zero input reponse
  Pada saat inisialisasi sistem dalam keadaan non relaxed, dan isi memori(berisi past output) tidak dalam keadaan kosong (y(-1)≠0). Respon sistem untuk masukan bernilai 0 pada keadaan ini disebut zero input response atau natural response.
- Zero state response
  Jika inisialisasi sistem dalam keadaan relaxed, hingga isi memori(berisi past output) dalam keadaan kosong (y(-1)=0). Respon sistem pada keadaan ini disebut zero state response atau forced response.

4.2 Sistem LCCDE

Tujuan Belajar 20

Peserta memahami bentuk *Linear Constant Coefficient Difference Equation* (LCCDE) dari sebuah sistem rekursif. Peserta mengenali koefisien-koefisien dan orde sistem.

Bentuk umum rekursif LCCDE

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

atau

$$\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k), \quad a_o \equiv 1$$

N adalah order

a_k dan b_k adalah koefisien filter.

Tujuan Belajar 21

Peserta dapat meredefinisi dan mencek linieritas dalam konteks LCCDE.

Sistem LCCDE linier bila
1. $y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$
2. zero-state linear
3. zero-input linear

Tentukan bila y(n) = ay(n-1) + x(n) linear!

Jawab:
1. y(0) = ay(-1) + x(0)
   y(1) = ay(0) + x(1) = a^2y(-1) + ax(0) + x(1)
   y(2) = ay(1) + x(2) = a^3y(-1) + a^2x(0) + ax(1) + x(2)
   $\vdots$

$$\underbrace{y(n) = a^{n+1} y(-1)}_{y_{zi}(n)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k)}_{y_{zs}(n)} \quad n \geq 0$$

$$\rightarrow (1)\,\text{ok}$$

2. cek zero-state linearity
   assume x(n) = c_1x_1(n) + c_2x_2(n)

$$y_{zs} = \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k) = \sum_{k=0}^{n} a^k (c_1 x_1(n-k) + c_2 x_2(n-k))$$

$$= \mathrm{C}_1 \sum_{k=0} a^k x_1(n-k) + C_2 \sum_{k=0} a^k x_2(n-k)$$

$$= C_1 y_{zs}^{(1)}(n) + C_2 y_{zs}^{(2)}(n) \rightarrow \text{linear}$$

3. assume $y(-1) = C_1y_1(-1) + C_2y_2(-1)$
   $y_{z1}(n) = a^{n+1}[C_1y_1(-1) + C_2y_2(-1)]$
   $= C_1\, a^{n+1}y1(-1) + C_2\, a^{n+1}y_2(-1)$
   $= C_1y_{z1}(n) + C_2y_{zi}(n)$
   $\rightarrow$ OK

$\Rightarrow$ $y(n) = ay(n-1) + x(n)$ linier
Dengan pola yang sama, kita dapat memperlihatkan bahwa

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

$\rightarrow$ linear

Tujuan Belajar 22

Peserta dapat meredefinisi dan mencek time invariance dalam konteks LCCDE.

Untuk $y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$

LCCDE time invariance jika a_k dan b_k konstan

Tujuan Belajar 23

Peserta dapat meredefinisi dan mencek stabilitas dalam konteks LCCDE

Stabilitas BIBO dalam konteks LCCDE tercapai dengan syarat jika dan hanya jika untuk setiap masukan terbatas dan setiap kondisi awal yang terbatas, respon sistem keseluruhan terbatas.

Tujuan Belajar 24

Peserta dapat menghitung solusi LCCDE melalui penghitungan solusi homogen dan solusi partikular.

$Y(n) = y_h(n) + y_p(n)$
$\downarrow$ $\downarrow$ particular
homogenous

- Mencari $y_h(n)$
  1. Buat homogeneous difference equation
  2. Assume $y_h(n) = \lambda^n$ (exponential solution)
  3. Substitusi $\sum_{k=0}^{N} a_k\, l^{n-k} = 0$

     $\Rightarrow \lambda^{n-N}(\lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + a_2\lambda^{N-2} + \ldots + a_{N-1}\lambda + a_N)$

$\uparrow$

polinomial karakteristik

akar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$

(complex) $\Rightarrow$ complex conjugate

4. Cari solusi umum

   $\rightarrow$ asumsi akar distinct

   $y_h(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \ldots + C_N\lambda_N^n$

   cari C_N lewat kondisi awal

   Catatan :

   Karena $y_h(n)$ mengasumsikan $x(n) = 0$

   $\rightarrow y_h(n) = y_{zi}(n)$

Contoh :

$Y(n) + a_1y(n-1) = x(n)$, cari $y_h(n)$

(1). $y(n) + a_1y(n-1) = 0$ N=1

(2). $y_h(n) = \lambda^n$

(3). $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} = 0$

$\Rightarrow \lambda^{n-1} (\lambda+a_1) = 0$

$\downarrow$ PK $\rightarrow$ akar $\lambda_1 = -a_1$

(4). Akar distinct

$\Rightarrow y_h(n) = C_1(-a^1)^n$

kondisi awal $y(0) = -a_1y(-1)$ (zero input)

dan $y_h(0) = C_1 \Rightarrow C_1 = (-a_1)\, y(-1)$

$\Rightarrow y_h(n) = (-a_1)^{n+1}\, y(-1)$ $n \geq 0$

Ctt :

Bila λ_1 adalah akar dengan multiplicity m, ie $(\lambda - \lambda_1)^m$

$\Rightarrow y_h(n) = C_1\lambda_1^n + C_2n\lambda_1^n + C_3n^2\lambda_1^n + \ldots + C_mn^{m-1}\lambda_1^n + C_{m+1}\lambda_{m+1}^n + \ldots + C_N\lambda_n$ dst.

- Mencari solusi khusus

Yp(n) adalah solusi apa saja, yang penting memenuhi

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_p(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k), \quad a_o \equiv 1$$

$\rightarrow$ gunakan $y_p(n)$ yang mengandung $x(n)$

Contoh :

$Y(n) + a_1y(n-1) = x(n)$ $|a_1| < 1$

Cari solusi khusus bila $x(n) = u(n)$

Jawab :

1. Pilih $y_p(n) = Ku(n)$

2. Substitusi

   $Ku(n) + a_1Ku(n-1) = u(n)$

3. Cari K untuk $n \geq 1$

N = 1 $\Rightarrow$ K.1 + a_1K.1 = 1

$$k = \frac{1}{1+a_1}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{1+a_1} u(n)$$

Tabel 1. Pilihan kandidat solusi untuk LCCDE.

Input Signal x(n)	Particular Solution $Y_p(n)$
A constant	K
AM^n	KM^n
An^M	$K_o n^M + K_1 n^{M-1} + \ldots + K_M$
$A^n n^M$	$A^N(K_o n^M + K_1 n^{M-1} + \ldots + K_M$
$\begin{Bmatrix} A\cos w_o n \\ A\sin w_o n \end{Bmatrix}$	$K_1 \cos w_o n + K_2 \sin w_o n$

Contoh :

Cari $y_p(n)$ dari

y(n) = (5/6) y(n-1) - (1/6) y(n-2) + x(n)

Bila x(n) = 2^n, n ≥ 0, zero elsewhere

Jawab :

1). $y_p(n)$ berbentuk $y_p(n) = K2^n u(n)$ n ≥ 0

2). Substitusi

$$K2^n u(n) = \frac{5}{6} K2^{n-1} u(n-1) - \frac{1}{6} K2^{n-2} u(n-2) + 2^n u(n)$$

$$\text{evaluate for } n \geq 2$$

$$4K = \frac{5}{6}(2K) - \frac{1}{6}K + 4$$

$$K = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow y_p(n) = \frac{8}{5} 2^n \quad n \geq 0$$

Total solution

$Y(n) = y_h(n) + y_p(n)$

Contoh :

$$y(n) + a_1 y(n-1) = x(n)$$

$$\downarrow x(n) = u(n)$$

$$y(-1) = \text{initial condition}$$

Solusi :

$Y_h(n) = C(-a)^n$

$Y_p(n) = \dfrac{1}{1+a_1}u(n)$

$\rightarrow y(n) = C(-a)^n + \dfrac{1}{1+a_1}, \qquad n \geq 0$

Cari $y_{zs}(n)$

Misal $y(-1) = 0$

$\Rightarrow y(0) = C(-a)^0 + \dfrac{1}{1+a_1} = C + \dfrac{1}{1+a_1}$

$y(0) + a_1(0) = 1 \rightarrow y(0) = 1$

$C = \dfrac{1}{1+a_1} \Rightarrow y_{zs}(n) = \dfrac{1-(-a_1)^{n+1}}{1+a_1}, \; n \geq 0$

Cari total solution

$y(0) + a_1y(-1) = 1$

$y(0) = -a_1y(-1) + 1$

tapi $y(0) = C + \dfrac{1}{1+a_1} \rightarrow C = -a_1(y(-1)) + \dfrac{1}{1+a_1}$

$$\Rightarrow y(n) = \underbrace{(-a_1)^{n+1}y(-1)}_{y_{zi}(n)} + \underbrace{\frac{1-(-a_1)^{n+1}}{1+a_1}}_{y_{zs}(n)}$$

Ctt :

$$\underbrace{Y_p(n)}_{\text{steady state respons vs transient respons}} = \lim_{n\rightarrow\infty} y_{zs}(n) = \frac{1}{1+a_1} \qquad |a_{<1}| \rightarrow \text{untuk stabilitas}$$

Tujuan Belajar 25

Peserta dapat mengidentifikasi zero state response, zero input response, steady state response, dan transient response dari solusi LCCDE.

Zero state response:

$\delta(n) \rightarrow h(n)$ = zero state response terhadap $x(n) = \delta(n)$

$\Rightarrow y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k) \qquad n \geq 0$

bila eksitasi = $\delta(n) \rightarrow y_p(n) = 0$

$\rightarrow$ harga $y_h(n)$

Zero input response:

Digunakan untuk mencari solusi homogen dengan $x(n) = 0$

Steady state response:

Tujuan Belajar 26

Peserta dapat mengestimasi respons impuls dari sistem rekursif.

Dalam sistem rekursif h(n) secara sederhana sama dengan zero-state response ketika masukan x(n) = δ(n).

Misalnya untuk sistem rekursif orde1, zero-state response-nya adalah:

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k)$$

dengan x(n) = δ(n) didapat:

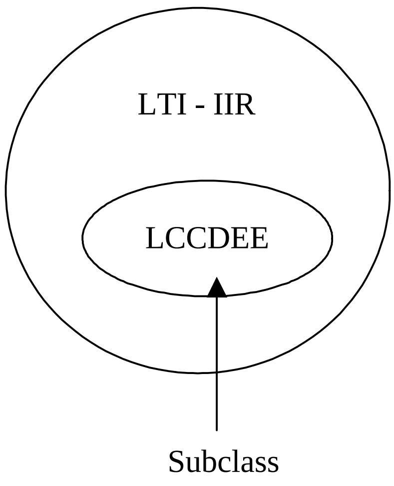
$$\begin{aligned} y_{zs}(n) &= \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k) \\ &= a^n \qquad\qquad n \geq 0 \end{aligned}$$

Jadi respons impuls sistem rekursif:

$$h(n) = a^n u(n)$$

bila eksitasi = δ(n) → $y_p(n) = 0$ → harga $y_h(n)$.

Setiap sistem LCCDE adalah IIR, tetapi tidak sebaliknya.



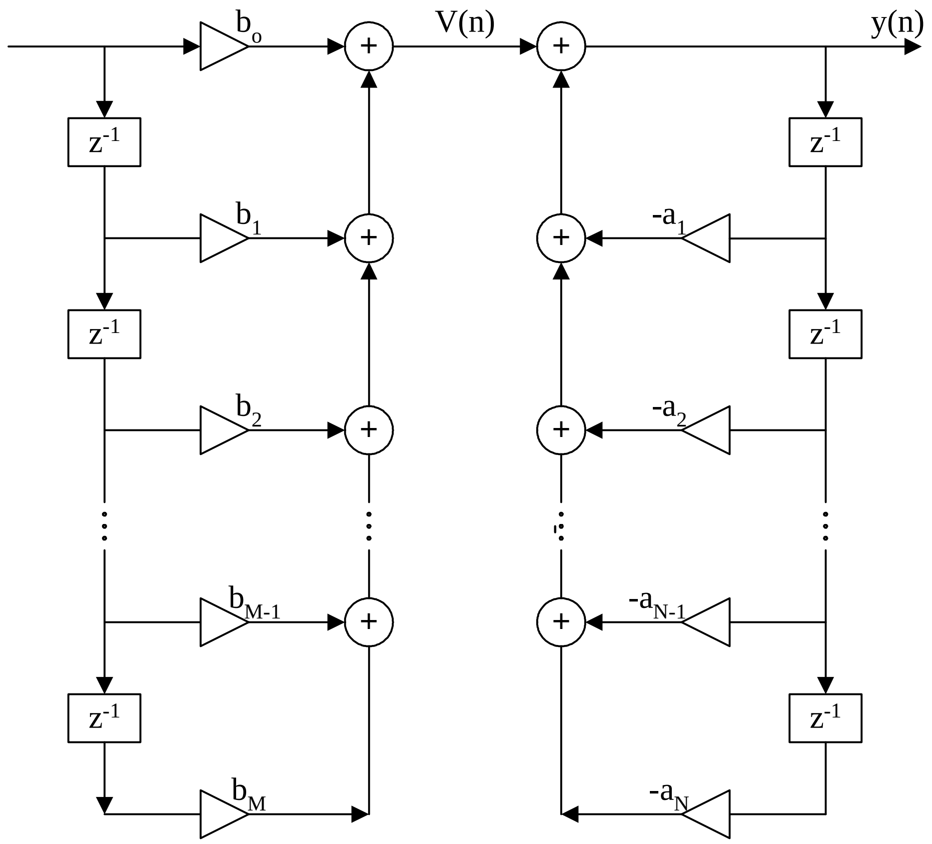
Gambar 11. LCCDE adalah subkelas dari LTI IIR.

4.3 Implementasi LCCDE

Tujuan Belajar 27

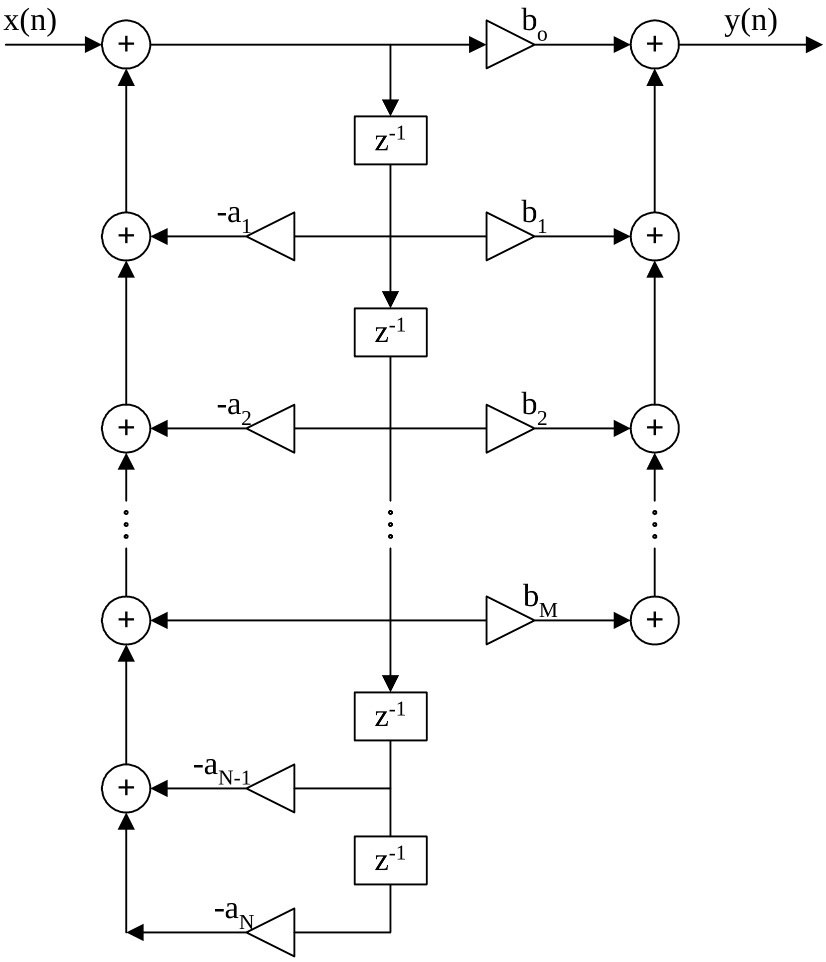
Peserta dapat mengimplementasi SWD LCCDE dalam bentuk Direct Form I dan Direct Form 2., serta bentuk rekursif dan nonrekursif.

Model Direct Form I:



Gambar 12. Implementasi struktur direct form tipe satu.

Direct Form II:



Gambar 13. Direct Form tipe dua.

Kasus khusus $a_k = 0$, k = 1, …, N

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

$\rightarrow$ moving average system

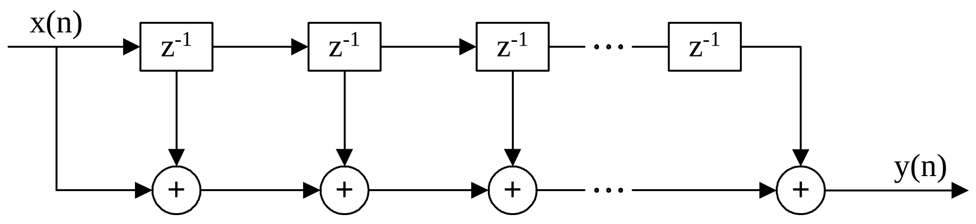
it is an FIR with

$$h(k) = \begin{cases} b_k, & 0 \le k \le M \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

FIR can be implemented

- non recursively
- recursively

Non rekursif FIR:



Gambar 14. Implementasi FIR secara nonrekursif.

Jadi baik FIR maupun IIR adalah LTI System, sedangkan sifat recursive dan non recursive lebih tentang struktur dari implementasi sistem.

5 Penutup

Demikian telah dijelaskan sinyal dan sistem dalam domain waktu. Pada bagian berikut, sinyal dan sistem akan dijelaskan pada domain yang lain, yakni domain z dan domain frekuensi.