Bab 1: PENDAHULUAN

1 Sinyal, Sistem, dan Pemrosesan Sinyal

Tujuan Belajar 1

Peserta mengetahui definisi, representasi matematis, dan pengertian dasar tentang sinyal, sistem, dan pemrosesan sinyal

Sinyal adalah besaran fisis yang berubah menurut waktu, ruang, atau variabel-variabel bebas lainnya. Contoh sinyal: sinyal ucapan, ECG, dan EEG.

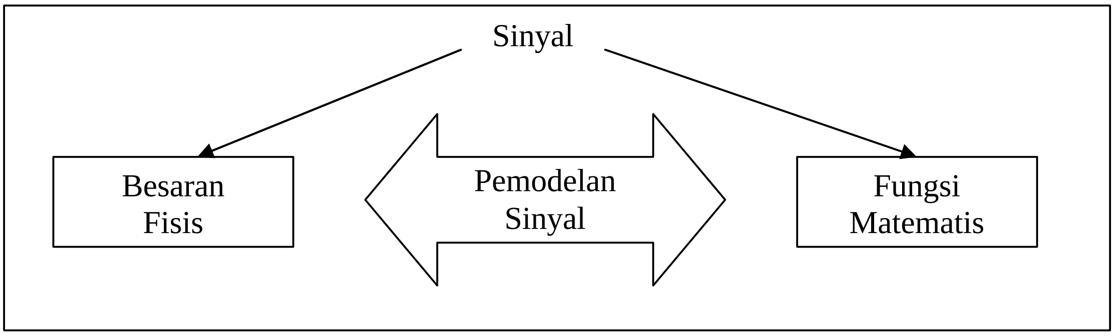
Secara matematis, sinyal adalah fungsi dari satu atau lebih variabel independen. Proses ini dilakukan melalui pemodelan sinyal. Contoh fungsi matematis dari sinyal adalah:

$$s_1(t) = 5t$$

$$s(x, y) = 3x + 2xy + 10y^2$$

$$s(t) = \sum_{i-1}^{N} A_i(t) s_i(t)$$

$$s(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i(t) \sin[2pF_i(t)t + q_i(t)]$$



Gambar 1. Melalui pemodelan sinyal, besaran fisis dapat direpresentasikan menjadi fungsi matematis.

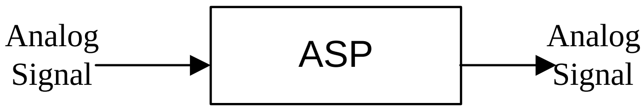
2 Elemen-Elemen Dasar Sistem DSP

Tujuan Belajar 2

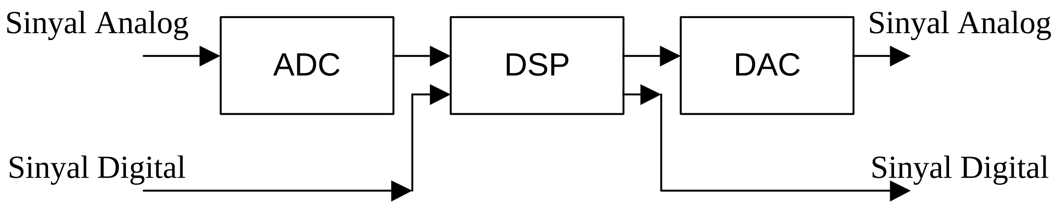
Peserta memahami elemen-elemen dasar sistem DSP, termasuk A/D dan D/A, berserta untung-ruginya apabila dibandiungkan dengan sistem analog.

Sistem didefinisikan sebagai pemroses sinyal. Sistem biasanya dilukiskan sebagai sebuah kotak yang memiliki dua panah merepresentasikan sinyal. Panah masuk adalah sinyal masukan yang akan diproses, sedangkan panah keluar merepresentasikan sinyal hasil pemrosesan.

2.1 Sistem Analog vs Sistem Digital



Gambar 2. Pemrosesan sinyal analog secara analog.



Gambar 3. Pemrosesan sinyal secara digital dapat dilakukan terhadap sinyal analog maupun sinyal digital. Blok ADC mengubah sinyal analog menjadi digital, sedangkan blok DAC mengubah sinyal digital menjadi sinyal analog.

Keuntungan pemrosesan secara digital:

- Programmable
- Lebih murah karena VLSI
- Kontrol akurasi yang lebih baik
- Praktis karena adanya VLSI

3 Klasifikasi Sinyal

Tujuan Belajar 3

Peserta dapat mengklasifikasikan berbagai sinyal (real vs. kompleks, multichannel vs. single channel, multidimensional vs. single dimensional, waktu kontinu vs. waktu diskrit, nilai kontinu vs. nilai diskrit, sinyal digital vs. analog, deterministik vs. random) dan sumber-sumbernya.

3.1 Sinyal Nyata vs Kompleks

Sinyal nyata (*real*) adalah sinyal yang bernilai bilangan nyata. Sinyal kompleks adalah sinyal yang bernilai bilangan kompleks. Perhatikan dua sinyal berikut ini:

$$S_1(t) = A\sin 3\pi t \qquad \text{vs} \qquad S_2(t) = Ae^{j3\pi t} = A\cos 3\pi t + j\sin 3\pi t$$

Maka $S_1(t)$ adalah sinyal nyata, sedangkan $S_2(t)$ adalah sinyal kompleks.

3.2 Multi channel vs Single channel

Sinyal multikanal (*multichannel*) adalah sinyal yang terdiri dari kumpulan beberapa sinyal independen (komposit). Sinyal satu kanal (single channel) adalah sinyal tunggal. Perhatikan dua sinyal berikut ini:

$$S_1(t) = \{s_1(t), s_2(t), s_3(t)\} \qquad \text{vs} \qquad S_2(t) = s_1(t)$$

Maka $S_1(t)$ adalah sinyal multikanal, sedangkan $S_2(t)$ adalah sinyal satu kanal. Contoh sinyal multikanal adalah sinyal video berwarna (kanal-kanal merah, hijau, dan biru), serta sinyal musik stereo (kanal-kanal kiri dan kanan). Contoh sinyal satu kanal adalah sinyal radio *medium wave* (MW) pada radio biasa.

3.3 Multi Dimensional vs Single Dimensional

Sinyal multidimensi (*multi dimensional*) adalah sinyal dengan lebih dari satu variabel independen. Sinyal satu dimensi (*single dimensional*) adalah sinyal dengan variable independen tunggal. Perhatikan dua sinyal berikut ini:

$$f(x, y) \qquad \text{vs} \qquad s_1(t)$$

Sinyal $f(x, y)$ adalah sinyal multidimensi karena memiliki variable independen *x* dan *y*. Sinyal $s_1(t)$ adalah sinyal dimensi satu karena variable independennya hanya *t*.

3.4 Continuous Time vs Discrete Time

Sinyal waktu kontinu (*continous time*) adalah sinyal dengan variable independen bernilai nyata (*real*). Sinyal waktu diskrit (*discrete time*) adalah sinyal dengan variable independen bernilai integer. Perhatikan dua sinyal berikut ini:

$$x(t) = e^{-|t|}, -\infty < t < \infty \qquad \text{vs} \qquad x(n) = \begin{cases} 0.8^n, & \text{n} \ge 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

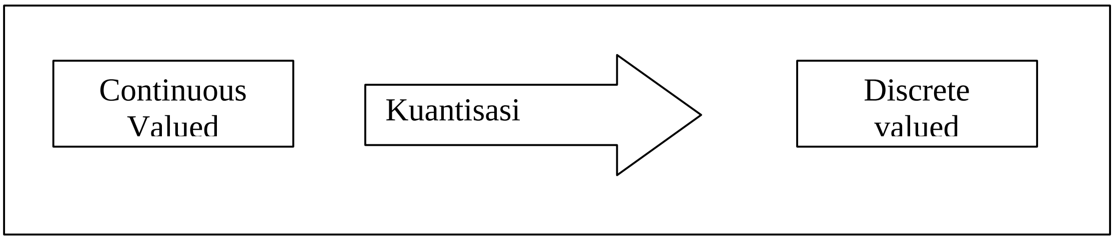
Sinyal $x(t)$ adalah sinyal waktu kontinu karena t adalah bilangan nyata. Sinyal $x(n)$ adalah sinyal waktu diskrit karena n adalah bilangan integer.

Ada dua cara memperoleh sinyal waktu diskrit:

- Sampling dari sinyal waktu kontinu
- Mencacah (*counting*)

3.5 Continuous Valued vs Discrete Valued

Sinyal nilai kontinu (*continuous valued*) adalah sinyal yang besarnya (atau variabel dependennya) merupakan bilangan nyata. Sinyal nilai diskrit (*discrete valued*) adalah sinyal yang besarnya (atau variabel dependennya) merupakan bilangan diskrit (artinya bilangan yang memiliki indeks).



Gambar 4. Melalui kuantisasi, sinyal bernilai kontinu dapat diubah menjadi sinyal bernilai diskrit.

Sinyal digital adalah sinyal yang sekaligus discrete time dan discrete valued, sedangkan Sinyal analog adalah sinyal yang sekaligus continuous time dan continuous valued.

3.6 Sinyal Deterministik vs Sinyal Random

Sinyal deterministik adalah sinyal dimana besaran nya diketahui dengan pasti apabila diketahui variable independen nya (misalnya besarnya di masa lalu, saat ini, dan masa datang diketahui dengan pasti).

Sinyal random adalah sinyal yang besarnya tidak terprediksi sebelum terjadi. Kadang-kadang sinyal yang rumit menggunakan model random.

4 Konsep Frekuensi untuk Sinyal Waktu Diskrit (D-T) dan Sinyal waktu Kontinu (C-T)

Tujuan Belajar 4

Peserta memahami konsep frekuensi, amplituda dan fasa pada sinyal-sinyal waktu diskrit dan waktu kontinu, serta perbedaan sifat-sifatnya, terutama pada sinyal sinusoidal.

4.1 Sinyal C-T

Sebuah sinyal analog berbentuk sinusoid

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t + \theta), \; -\infty < t < \infty$$

Dalam konteks ini, masing-masing besaran di ruas kanan dikenal sebagai:

- A : Amplituda
- Ω : Frekuensi (dalam radian per detik)
- θ : Phase/ fasa (dalam radian)

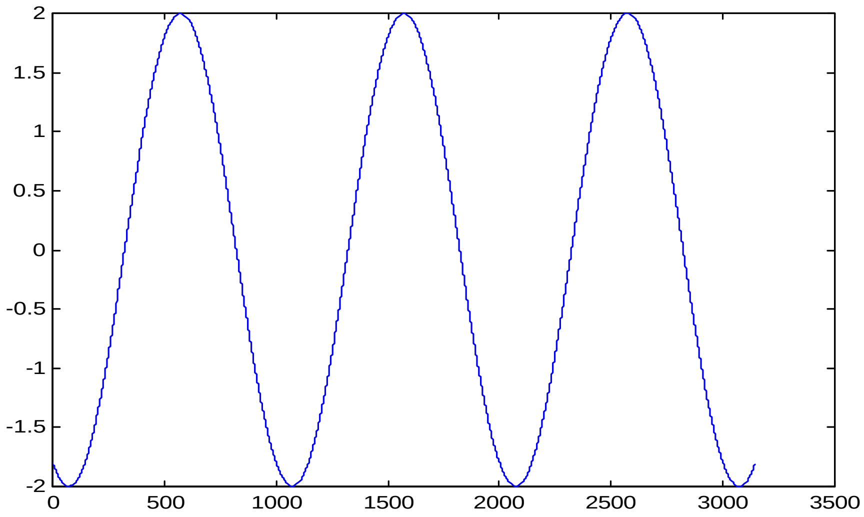
Frekuensi Ω juga memiliki hubungan dengan frekuensi F dengan satuan Hertz (Hz) melalui

$$\Omega = 2\pi F$$

Bila frekuensi F diketahui, maka bisa didefinisikan perioda fundamental T_{FP}

$$T_{FP} = \frac{1}{F}$$

Contoh: Gambar gelombang $x_a(t) = A\cos(2\pi t + \theta)$ menggunakan Matlab.



Gambar 5. Contoh gelombang $x_a(t) = A\cos(2\pi t + \theta)$.

Script Matlab untuk menghasilkan gelombang ini adalah:

```
» t=[-pi/2:0.001:pi/2];
» x=2*cos(2*pi*t);
» plot(x);
```

Sifat Frekuensi F :

1. Untuk *F* tetap $\rightarrow$ $x_a(t)$ periodik, yaitu $x_a(t+T) = x_a(t)$. Perioda dari sinyal ini adalah *T* sedemikian sehingga untuk semua *t* berlaku

$$x_a(t+T) = x_a(t)$$

   Perioda fundamental adalah perioda yang nilainya terkecil, dan berlaku $T = kT_{FP}$ di mana $k = 1, 2, \cdots$. Perlu diingat bahwa T_{FP} itu unik, sedangkan *T* tidak.

2. Sinyal dengan *F* berbeda adalah berbeda
3. Menaikkan *F* sama dengan menaikkan laju osilasi (*rate of oscillation*)

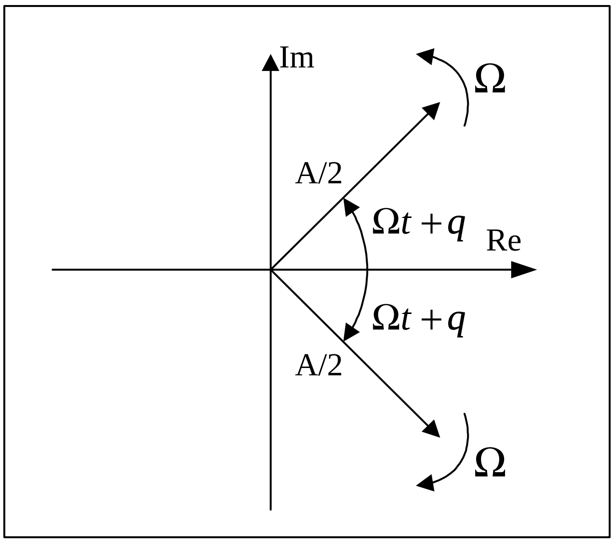
Ketiga sifat ini juga berlaku bagi frekuensi pada sinyal complex exponential $x_a(t) = Ae^{j(\Omega t + q)}$, karena identitas Euler:

$$e^{\pm jq} = \cos(q) \pm j\sin(q)$$

dan sebaliknya

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t + q) = \frac{A}{2}e^{j(\Omega t + q)} + \frac{A}{2}e^{-j(\Omega t + q)}$$

Sifat frekuensi dan fasa dapat dilukiskan dalam bentuk fasor, seperti yang terlihat pada bidang kompleks beirkut ini.



Gambar 6. Representasi fasor dari sinyal sinusoid. Semakin tinggi frekuensi, semakin besar sudut.

4.2 Sinyal D-T Sinusoidal

Sebuah sinyal sinusoidal waktu diskrit berbentuk

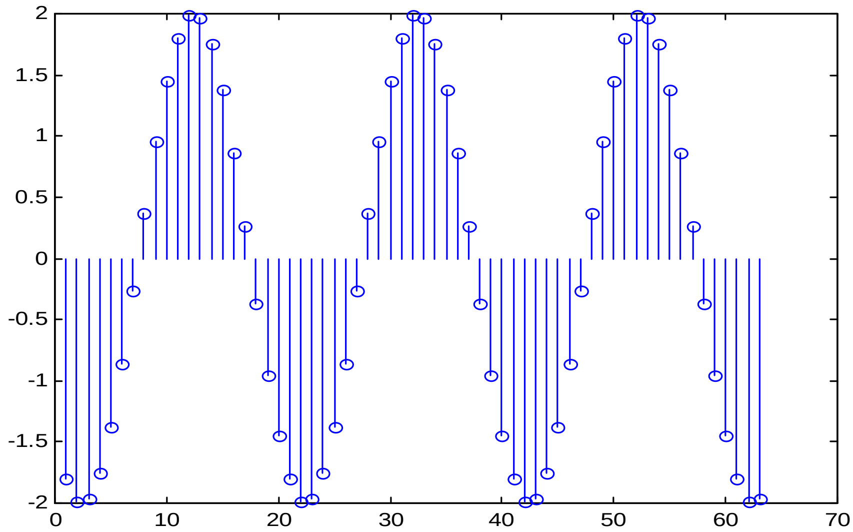
$$x(n) = A\cos(wn + q); \; -\infty < n < \infty$$

dimana n adalah indeks sample. Untuk sinyal seperti ini, parameter di ruas kanan dikenal dengan nama

- A : Amplitudo
- ω : Frekuensi
- θ : Phasa

Sebagaimana pada kasus C-T, frekuensi w (dalam satuan radian per indeks sample) memiliki hubungan dengan frekuensi *f* melalui $w = 2pf$.

Contoh: Gambar gelombang dari sinyal $x(n) = A\cos(2pfn + q)$ adalah sebagai berikut



Gambar 7. Gelombang dari sinyal $x(n) = A\cos(2pfn + q)$.

Script Matlab untuk menggambarkan gelombang ini adalah:
» t=[-pi/2:0.05:pi/2];
» x=2*cos(2*pi*t);
» stem(x);

Berlainan dengan sifat frekuensi *F* pada kasus C-T, sifat frekuensi *f* adalah

1. Sinyal hanya periodik bila *f* rasional. Sinyal periodik dengan periode *N* apabila berlaku untuk semua *n* bahwa $x(n+N) = x(n)$. Perioda fundamental N_F adalah N yang terkecil.

   Contoh : Agar periodik, maka

$$\cos(2pf(N+n)+q) = \cos(2pfn+q) = \cos(2pfn+q+2pk)$$

$$\Leftrightarrow 2pfN = 2kp \Leftrightarrow f = \frac{k}{N} \Leftrightarrow f \text{ harus rasional}$$

Pada kasus C-T, perubahan kecil pada frekuensi *F* mengakibatkan perubahan kecil pada periode *T*. Hal ini tidak terjadi pada kasus D-T karena perubahan kecil pada *f* mengakibatkan perubahan besar pada *N*. Contoh:

$$f_1 = 31/60 \Rightarrow N_1 = 60 \text{ sedangkan } f_2 = 30/60 \Rightarrow N_2 = 2$$

2. Sinyal dengan frekuensi berbeda sejauh $k2\pi$ (dengan *k* integer) adalah identik. Jadi berbeda dengan kasus C-T, pada kasus D-T ini, sinyal dengan frekuensi unik tidak selalu berarti sinyalnya unik. Contoh:

   $$\cos[(w_0 + 2p)n + q] = \cos(w_0 n + q)$$

   karena cos ($2\pi k + q$) = cos q. Jadi bila $x_k(n) = A\cos(w_k n + q)$, k = 0, 1, … dimana $w_k = w_0 + 2kp$, maka $x_k(n)$ tidak bisa dibedakan satu sama lain, artinya $x_1(n) = x_2(n) = x_3(n) = \ldots.$ $x_k(n)$ disebut *indistinguishable identical* atau alias satu sama lain.

   Jadi sinyal dengan frekuensi berbeda akan berbeda bila frekuensinya dibatas pada daerah $-p < w < p$ atau $-\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2}$. Di luar itu, terjadi *aliasing*.

3. Frekuensi tertinggi yang bisa dicapai adalah pada $w = \pm\pi$, $f = \pm 1/2$. Jadi daerah fundamental (*fundamental range*) didefinisikan sebagai daerah frekeusn sepanjang 2π yang mengandung frekuensi 0, misalnya $0 \leq \omega \leq 2\pi$ atau $-\pi \leq \omega < \pi$.

5 Konsep *Harmonically-Related Complex Exponentials*

Tujuan Belajar 5

Peserta memahami konsep *harmonically related complex exponentials* untuk kasus waktu diskrit dan waktu kontinu, serta definisi dari frekuensi fundamental.

5.1 Continuous-Time Exponentials

Perhatikan sekumpulan sinyal ini:

$$s_k(t) = e^{jk\Omega_o t} = e^{j2pkF_o t}; k = 0,1,2,\cdots$$

Sinyal ini memiliki keistimewaan, yaitu satu sama lain memiliki hubungan secara harmonik. Sinyal $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$, dst, memang memiliki beragam periode *T*, namun ada sebuah periode $T_p = \frac{1}{F_0}$ yang ternyata dimiliki oleh setiap sinyal tersebut. Periode ini disebut perioda fundamental dari kumpulan sinyal ini, dan F_0 disebut frekuensi fundamental dari kumpulan sinyal ini.

Salah satu sifat istimewanya adalah semua sinyal di dunia yang memiliki periode T_p dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari sinyal-sinyal $s_k(t)$ ini, menurut

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k s_k(t)$$

5.2 Discrete-Time Exponentials

Hal yang sama berlaku juga di domain waktu diskrit. Di sini, sinyal yang terhubung secara harmonis adalah

$$s_k(n) = e^{j2pKf_o n}$$

yang memiliki frekuensi fundamental $f_o = \frac{1}{N}$ dengan periode N. Sinyal

$s_k(n) = e^{j2pKn/N}$ ini dapat digunakan untuk menghasilkan sinyal periodik dengan periode N menurut kombinasi linier:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k s_k(n)$$

Contoh 1:

Diketahui $x(n) = \sin\left(\frac{2p}{N}n + q\right)$, dimana $q = 2\pi q/N$, dan q, N integer

a). Cari sinyal yang terhubung secara harmonis dengan fasa sama
b). Cari sinyal sama frekuensi, beda fasa

Jawab:

a). $x_k(n) = \sin\left(\frac{2pnk}{N} + q\right)$, maka $f_k = k/N$. $x_k(n)$ dapat diekspresikan sebagai $x_k(n) = \sin\left(\frac{2p(kn)}{N} + q\right) = x(kn)$. Jadi $x_k(0) = x(0)$, $x_k(1) = x(k)$, $x_k(2) = x(2k)$, dan seterusnya. Kita dapat membangkitkan sinyal yang terhubung secara dengan frekuensi $f_k = k/N, \quad k = 0,1,\cdots,N-1$

b). Phase q dikontrol dengan $f_k(n)$ dengan mengambil nilai pertama dari deret pada lokasi $q = \frac{qn}{2p}$, di mana q adalah integer .

6 Konversi Analog to Digital dan Digital to Analog

Tujuan Belajar 6

Peserta mengerti proses mengubah sinyal analog menjadi sinyal waktu diskrit dan digital, melalui pencuplik, kuantisasi, dan pengkodean.

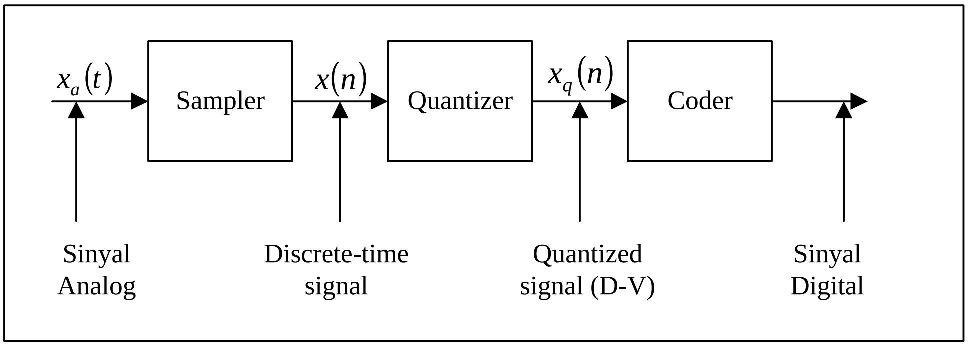
Sinyal analog bisa diubah menjadi sinyal digital dengan analog-to-digital converter (ADC). Sebaliknya sinyal digital bisa diubah menjadi sinyal analog dengan digital-to-analog comverter (DAC). Dengan adanya kemampuan ini, maka pemroses digital bisa digunakan untuk memproses sinyal analog, karena sinyal analog diubah dahulu menjadi sinyal digital.

Gambar 8. Konversi sinyal analog menjadi sinyal digital.

Gambar 9. Konversi sinyal digital menjadi sinyal analog.

6.1 ADC

Proses ADC terdiri dari tiga tahap. Pertama sinyal analog $x_a(t)$ dilalukan pada sebuah pencuplik (*sampler*). Hasilnya adalah sinyal waktu diskrit $x(n)$. Sinyal waktu diskrit ini kemudian dikuantisasi untuk menghasilkan sinyal bernilai digital $x_q(n)$. Sinyal ini kadangkala perlu dikode agar sesuai dengan aplikasi tertentu, menghasilkan sinyal digital yang diinginkan.



Gambar 10. Proses konversi sinyal analog menjadi sinyal digital.

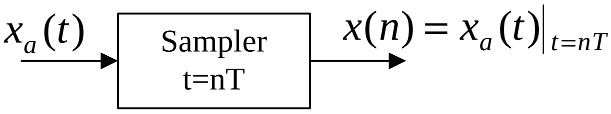
6.2 Proses sampling C-T menjadi D-T

Tujuan Belajar 7

Peserta dapat menghitung sinyal waktu diskrit yang dihasilkan dari proses sampling sinyal waktu kontinue. Untuk kasus sinyal sinusoidal yang diketahui frekuensinya, peserta dapat menghitung frekuensi sinyal diskrit yang dihasilkan pada sampling rate tertentu, dan sebaliknya.

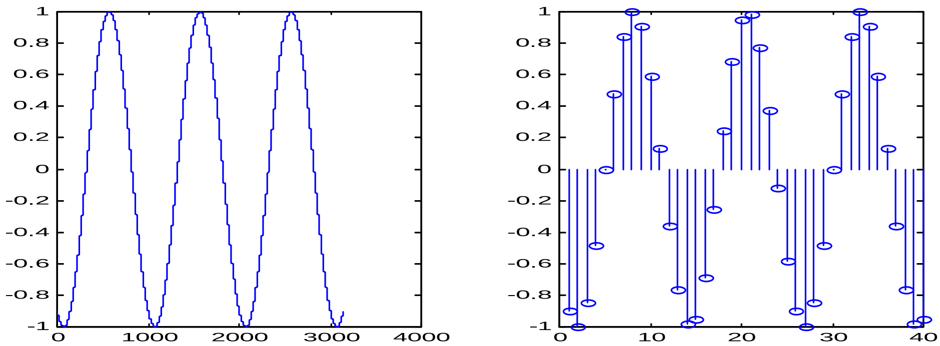
Proses yang terjadi dalam blok sampler secara matematis adalah:

$$x(n) = x_a(nT) = x_a(t)\big|_{t=nT}$$



Gambar 11. Pensampling.

Sebagai contoh, sinyal analog digambarkan pada bagian kiri dari gambar berikut. Ketika disampling, sinyal yang dihasilkan digambar di sebelah kanan.



Gambar 12. Gelombang di sebelah kanan adalah hasil sampling dari gelombang di sebelah kiri.

Script Matlab 1:

```
» t=[-pi/2:0.01:pi/2];              » t=[-pi/2:0.08:pi/2];
» x=cos(2*pi*t);                            » x=cos(2*pi*t);
» subplot(1,2,1),plot(x)            » subplot(1,2,2),stem(x)
```

Contoh 2 :

Samplinglah sinyal $x_a(t) = A\cos(2pFt + q)$ menjadi sinyal $x(n)$ dengan sampling frekuensi F_s, kemudian carilah hubungan antara frekuensi dari sinyal $x_a(t)$ dengan frekuensi dari sinyal $x(n)$.

Jawab:

$$x(n) = x_a(t)\big|_{t=nT} = A\cos(2pFnT + q) = A\cos\left(\frac{2pFn}{F_s} + q\right) = A\cos(2pfn + q)\Big|_{f=\frac{F}{F_s}}$$

$$\Rightarrow w = 2pf = 2p\,\frac{F}{F_s} = \Omega\frac{1}{F_s} = \Omega T$$

Jadi sinyal $x(n)$ yang dihasilkan memiliki frekuensi yang proporsional terhadap frekuensi dari sinyal $x_a(t)$.

Namun kita perlu ingat bahwa meskipun $-\infty < F < \infty$ dan $-\infty < \Omega < \infty$, akan tetapi ada keterbatasan $-½ < f < ½$ dan $-\pi < \omega < \pi$. Oleh sebab itu agar rumus $w = \Omega T$ di atas bisa berlaku maka harus berlaku pembatasan:

$$-\frac{1}{2T} = -\frac{F_s}{2} \le F \le \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T}\text{, sehingga } F_{\max} = \frac{F_s}{2}$$

Atau dengan cara yang sama,

$$-\frac{p}{T} = -pF_s \le \Omega \le pF_s = \frac{p}{T}\text{, sehingga } \Omega_{\max} = pF_s$$

Tabel 1. Diagram konversi yang menghubungkan antara sinyal waktu kontinu dengan sinyal waktu diskrit hasil sampling.

CT		DT
$\Omega = 2pF$		$w = 2pf$
rad/sec, Hz		rad/sample, cycle/sample
	$\xrightarrow{w = \Omega T,\ f = F/Fs}$	
	$\xleftarrow{\Omega = w/T,\ F = f.Fs}$	
$-\infty < \Omega < \infty$		$-\frac{p}{T} \le \Omega \le \frac{p}{T}$
$-\infty < F < \infty$		$-\frac{Fs}{2} \le F \le \frac{Fs}{2}$

6.3 Aliasing

Tujuan Belajar 8

Peserta memahami konsep aliasing, dan tahu cara menghindarinya. Peserta dapat menghitung sinyal diskrit hasil sampling sinyal analog pada kasus terjadi aliasing.

Contoh 3:

Misalkan $x_1(t) = \cos 2\pi 10t$ dan $x_2(t) = \cos 2\pi 50t$. Samplinglah kedua sinyal ini menjadi $x_1(n)$ dan $x_2(n)$ dengan $F_s = 40$ Hz, dan bandingkan hasilnya.

Jawab:

$F_s = 40$ Hz $\Rightarrow T = 1/40$, maka

$$x_1(n) = x(t)\big|_{t=nT} = \cos 2\pi 10nT = \cos 2\pi \frac{10}{40}\mathrm{n} = \cos\frac{\pi}{2}\mathrm{n}$$

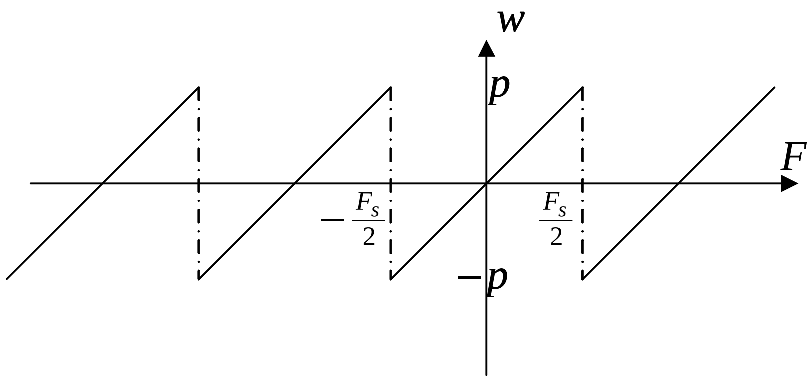
dan

$$x_2(n) = x_2(t)\Big|_{t=nT} = \cos 2\pi\left(\frac{50}{40}\right)n = \cos(2\pi)\left(1+\frac{10}{40}\right)n = \cos 2\pi\frac{10}{40}n = \cos\frac{\pi}{2}n$$

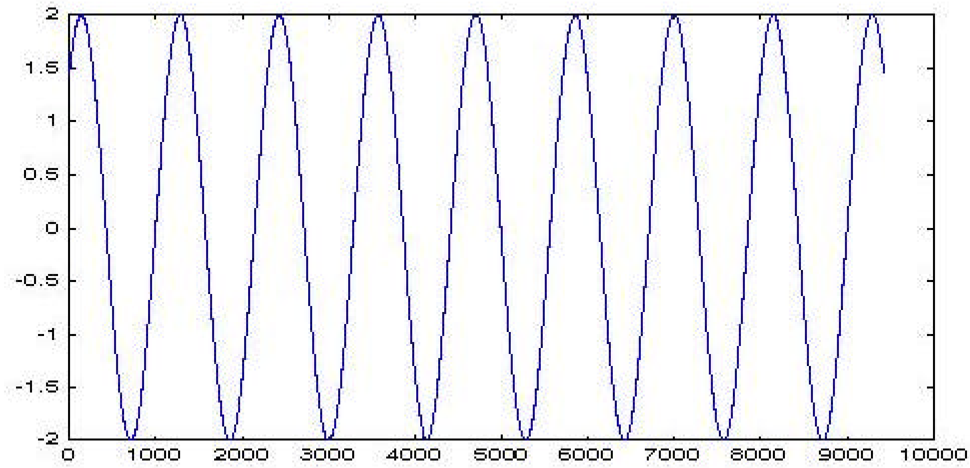
Perhatikan bahwa ternyata $x_1(n)$ = $x_2(n)$! Dapat disimpulkan untuk F_s = 40 Hz, sinyal F_2 = 50 Hz adalah *alias* dari F_1= 10 Hz. Demikian juga $F_k = 10 + F_s k$

6.4 Generalisasi Aliasing

Secara umum, sampling dari $x_a(t) = A\cos(2\pi F_0 t + \theta)$ pada frekuensi sampling F_s menghasilkan $x(n) = A\cos(2\pi f_0 n + \theta)$, dimana $f_0 = \frac{F_0}{F_s}$. Bila $-\frac{F_s}{2} < F_o < \frac{F_s}{2}$, hasil sampling terhadap frekuensi ini adalah *one-to-one mapping* antara frekuensi F_0 dengan f_0. Bila tidak, misalnya $x_a(t) = A\cos(2\pi F_k t + \theta)$, ternyata $F_k = F_0 + kF_s$, $k = \pm 1, \pm 2, \cdots$, yakni F_k adalah sama (alias) dengan F_0 sehingga terjadi aliasing.



Gambar 13. Hubungan antara frekuensi waktu kontinu dengan frekuensi waktu diskrit dari sinyal yang terhubung oleh proses sampling.



Gambar 14. Contoh sinyal sinusoidal.

Contoh 4:

Diketahui sinyal analog $x_a(t) = 3\cos 100pt$.

a). Cari frekuensi sampling minimum untuk menghindari aliasing!

Jawab:

$$x_a(t) = 3\cos 100pt = 3\cos(2pFt + q) \Rightarrow q = 0;\ F = 50 \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow F_{s\,\min} = 2F = 100 \text{ Hz}$$

b). Jika F_s = 200 Hz, berapa $x(n)$?

Jawab:

$$x(n) = x_a(t)\Big|_{t=nT} = 3\cos 100\frac{p}{200} = 3\cos\frac{p}{2}n$$

c). Jika F_s = 75 Hz, berapa $x(n)$?

Jawab:

$$x(n) = x_a(t)\Big|_{t=nT} = 3\cos 100\frac{pn}{75} = 3\cos\frac{4p}{3}n \Rightarrow w = \frac{4}{3}p$$

Namun diinginkan frekuensi berada pada daerah fundamental $-p \le \overline{w} < p$, maka digunakan $\overline{w} = w - 2p = \frac{4}{3}p - \frac{6}{3}p = -\frac{2}{3}p$. Mengingat $\cos(-\overline{w}) = \cos(\overline{w})$, maka diperoleh $x(n) = 3\cos\frac{2}{3}pn$.

d). Cari frekuensi F, $0 < F < F_s/2$, dari sebuah sinusoid yang bila disample akan menghasilkan $x(n)$ yang sama!

Jawab :

Untuk F_s = 75 Hz, $F = f\,F_s$ = 75f. Untuk $x(n) = 3\cos\frac{2}{3}pn$ pada soal c) di atas, diperoleh $f = 1/3$. Maka F yang dicari adalah F = 75f =25 Hz. Contoh sinyal yang memiliki frekuensi ini adalah $y_a(t) = 3\cos 50pt$. Untuk sinyal ini F = 25 Hz adalah alias dari F = 50Hz pada F_s = 75 Hz (artinya di domain digital kedua sinyal identik).

6.5 Teorema Sampling, Nyquist Rate, Nyquist Criteria, dan Interpolasi Ideal

Tujuan Belajar 9

> Peserta mengerti teorema sampling Nyquist, Nyquist rate, Nyquist criteria.

Misalnya diketahui sinyal analog $x_a(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i \cos(2pF_i t + q_i)$. Sinyal ini adalah superposisi (penjumlahan) dari sinyal $s_i(t) = \cos(2pF_i t + q_i)$, yang disebut komponen frekuensi, karena setiap $s_i(t)$ memiliki frekuensi distink sebesar F_i. Berarti frekuensi tertinggi dari $x_a(t)$ adalah $F_{\max} = \max(F_i)$, dan frekuensi sampling harus memenuhi *kriteria Nyquist*, yaitu $F_s > 2F_{\max}$. Angka $2F_{\max}$ ini didefinisikan sebagai *Nyquist rate*.

6.6 Rekonstruksi Ideal

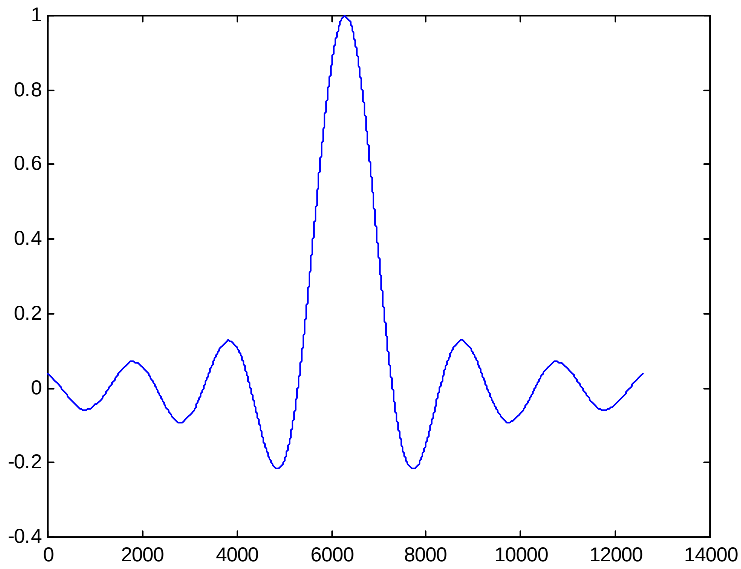
Tujuan Belajar 10

> Peserta dapat merekonstruksi sinyal analog dari sinyal digital melalui rekonstruksi ideal (fungsi sinc).

Memperoleh $x(n)$ dari $x_a(t)$ cukup mudah, yaitu melalui $x(n) = x_a(t)\big|_{t=NT}$. Tetapi bagaimana memperoleh (rekonstruksi) $x_a(t)$dari $x(n)$? Teorema sampling mengatakan proses ini hanya bisa berhasil bila kriteria Nyquist dipenuhi pada saat memperoleh $x(n)$.

Cara rekonstruksi adalah dengan menggunakan fungsi interpolasi $g(t)$. Misalnya $F_{\max} = B$. Maka, $g(t)$ = $\frac{\sin 2pBt}{2pBt}$, yang juga dikenal sebagai fungsi *sinc*. Proses interpolasi dilakukan melalui:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) g\left(t - \frac{n}{F_s}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, g(t - nT)$$



Gambar 15. Fungsi *sinc* sebagai penginterpolasi.

Contoh 5:

Diketahui sinyal analog $x_a(t) = 3\cos 50pt + 10\sin 300pt - \cos 100pt$. Berapa Nyquist rate nya?

Jawab:

Perhatikan:

$$x_a(t) = 3 \cos 50\pi t + 10 \sin 300\pi t - \cos 100\pi t$$
$$\downarrow F_1 = 25 \qquad \downarrow F_2 = 150 \qquad \downarrow F_1 = 50$$

Jadi sinyal ini memiliki tiga frekuensi, yaitu $F_1 = 25$ Hz, $F_2 = 150$ Hz, dan $F_3 = 50$ Hz.

Jadi Nyquist rate = $2F_{max}$ = 2×150Hz = 300 Hz.

Contoh 6:

Diketahui sinyal analog

$$x_a(t) = 3 \cos 2000\pi t + 5 \sin 6000\pi t + 10 \cos 12000\pi t$$

a). Hitung Nyquist Rate

b). Bila F_s = 5000 Hz, cari $x(n)$

c). Cari $y_a(t)$ yang dihasilkan oleh interpolasi ideal

Jawab:

a). Bila kita definisikan $x_1(t) = 2\cos 2000pt$, $x_2(t) = 5\sin 6000pt$, dan $x_3(t) = 10\cos 12000pt$, maka $x_a(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$, dan sinyal ini memiliki tiga frekuensi: F_1 = 1000 Hz, F_2 = 3000 Hz, dan F_3 = 6000 Hz

Jadi Nyquist ratenya adalah $F_N = 2\times 6000 = 12$ kHz

b). Bila F_s = 5000 Hz, maka kita mencari $x(n)$ dengan mencari $x_1(n) + x_2(n) + x_3(n)$ yang masing-masing frekuensi f_1, f_2, dan f_3 berada pada daerah fundamental.

- $x_1(n) = 3\cos(2000/5000)\,\pi n = 3\cos 2\pi(1/5)n$, dengan $f_1 = 1/5$ dan $-½ < f_1 < ½$.
- $x_2(n) = 5\sin(6000/5000)\,\pi n = 5\sin 2\pi(3/5)n$. Di sini ada masalah karena $f_2 = 3/5$ sehingga tidak ada di daerah fundamental. Maka kita menggunakan alternatifnya, yaitu $f_2 = f_2 - 1 = -2/5$. Jadi $x_2(n) = 5\sin 2\pi(-2/5)n = -5\sin 2\pi(2/5)n$.
- $x_3(n) = 10\cos(12000/5000)\pi n = 10\cos 2\pi(6/5)n$. Di sini juga ada masalah karena $f_3 = 6/5$ sehingga berada di luar daerah fundamental. Maka kita menggunakan alternatifnya $f_3 = 6/5 - 1 = 1/5$, yang kebetulan sama dengan f_1. Jadi $x_3(n) = 10\cos 2\pi(1/5)n$.

Dengan demikian $x(n) = x_1(n) + x_2(n) + x_3(n) = 13\cos 2\pi(1/5)n - 5\sin 2\pi(2/5)n$. Perlu diperhatikan bahwa sinyal ini sekarang hanya mempunyai dua frekuensi, yaitu $f_1 = 1/5$ dan $f_2 = 2/5$.

c). Karena kita menggunakan interpolasi ideal, maka kedua frekuensi $f_1 = 1/5$ dan $f_2 = 2/5$ akan menghasilkan dua frekuensi analog, masing-masing $F_1 = 1/5 \times F_s = 1$ kHz dan $F_2 = 2/5\times F_s = 2$ kHz. Interpolasi ideal tidak mengubah amplituda. Oleh sebab itu, kita peroleh hasil rekonstruksi sebagai:

$$y_a(t) = 13\cos 2000\pi t - 5\sin 4000\pi t$$

Kesimpulan kita bahwa sinyal hasil rekonstruksi berbeda dengan sinyal aslinya akibat pelanggaran kriteria Nyquist pada saat memperoleh sinyal $x_3(n)$.

6.7 Proses Kuantisasi

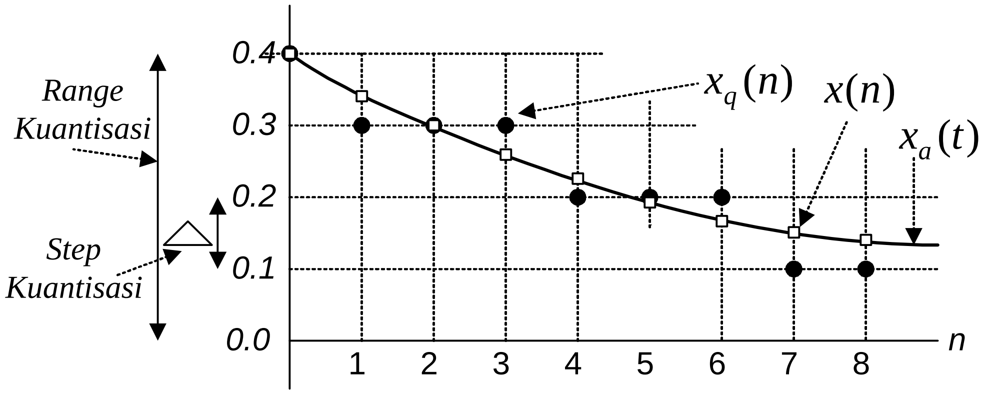
Tujuan Belajar 11

Peserta mengerti proses kuantisasi dan dapat menghitung error kuantisasi. Peserta mengetahui definisi kuantisasi level, *dynamic range*, dan resolusi, serta hubungan hal-hal tersebut dengan error kuantisasi.

Proses kuantisasi mengubah sinyal *continuous valued* $x(n)$ menjadi sinyal *discrete valued* $x_q(n)$, yang digunakan untuk merepresentasikan $x(n)$. Salah satu proses kuantisasi yang sering digunakan berbentuk $x_q(n) = Q[x(n)]$.

Kuantisasi ini menghasilkan kesalahan (*error*) kuantisasi sebesar $e_q(n) = x_q(n) - x(n)$. Besar kesalahan ini diilustrasikan pada Gambar berikut. Misalnya sinyal analog $x_a(t)$ ternyata memiliki nilai antara $0.1 \le x_a(t) \le 0.4$. Sinyal ini disampling pada sebuah frekuensi sampling tertentu menghasilkan $x(n)$. Pada titik-titik sampling, nilai $x(n)$

persis sama dengan $x_a(t)$. Namun ketika dikuantisasi, maka hasilnya $x_q(n)$ memiliki perbedaan dengan $x(n)$ (dan $x_a(t)$ pada titik sampling) sebesar $e_q(n)$. Hal ini disebabkan oleh adanya pembatasan nilai yang bisa dimiliki oleh $x_q(n)$. Dalam contoh ini, $x_q(n)$ hanya diberi kesempatan untuk mempunyai satu dari *L* buah nilai dari daftar yang terbatas {0.0, 0.1, 0.2, dst}. Nilai-nilai sebanyak *L* itu disebut sebagai *level kuantisasi*. *Step kuantisasi* (Δ) adalah selisih antara satu level dengan level terdekat berikutnya, yang dalam contoh ini sebesar 0.1.



Gambar 16. Proses kuantisasi. Δ = step kuantisasi (atau resolusi).

Ada dua cara untuk menentukan besarnya nilai untuk sebuah sampel: *trunkasi* atau *pembulatan* (*rounding*). Seperti yang diperlihatkan pada Tabel 2, pada cara trunkasi, nilai $x_q(n)$ yang dipilih untuk merepresentasikan $x(n)$ adalah level terbesar yang bernilai $\leq x(n)$. Pada cara pembulatan, nilai $x_q(n)$ yang terpilih adalah level yang menghasilkan $e_q(n)$ terkecil.

Tabel 2. Nilai-nilai yang terjadi dalam proses kuantisasi pada contoh di atas.

n	$x(n)$	Cara trunkasi		Cara pembulatan	
		$x_q(n)$	$\lvert e_q(n)\rvert$	$x_q(n)$	$\lvert e_q(n)\rvert$
0	0.40	0.40	0.00	0.40	0.00
1	0.34	0.30	0.04	0.30	0.04
2	0.30	0.30	0.00	0.30	0.00
3	0.26	0.20	0.06	0.30	0.04
4	0.22	0.20	0.02	0.20	0.02
5	0.19	0.10	0.09	0.20	0.01
6	0.18	0.10	0.08	0.20	0.02
7	0.15	0.10	0.05	0.20	0.05
8	0.14	0.10	0.04	0.10	0.04
	Rata-rata		0.042		0.024

Cara trunkasi sebenarnya lebih sederhana, namun bisa berakibat kesalahan yang lebih besar, yaitu $\left|e_q(n)\right| < \Delta$. Untuk cara rounding, kita peroleh pembatasan kesalahan (*error* *bound*) yang lebih baik, yakni $\left|e_q(n)\right| \le \frac{\Delta}{2}$. Pada contoh ini, cara tunkasi menghasilkan $\left|e_q(n)\right|$ rata-rata 0.042, sedangkan cara pembulatan menghasilkan $\left|e_q(n)\right|$ rata-rata 0.024.

Tujuan Belajar 12

Peserta mengetahui cara menghitung jumlah bit minimal agar error kuantisasi dapat dibatasi pada level tertentu.

Mengapa kita ingin melakukan kuantisasi padahal hal ini mengakibatkan kesalahan kuantisasi? Tidak lain karena kita ingin menghemat penggunaan jumlah bit untuk merepresentasikan sampel-sample sinyal. Apabila kita menyediakan b buah bit untuk kebutuhan setiap sampel, maka tersedia $L = 2^b$ kemungkinan level untuk $x_q(n)$. Apabila step kuantisasi adalah Δ, maka kuantisasi ini memiliki daerah (*range*) kuantisasi sebesar $(2^b - 1) \times \Delta$. (Pengurangan oleh angka satu disebabkan oleh kenyataan bahwa step kuantisasi yang pertama membutuhkan dua level, sedangkan step berikutnya cukup dengan satu level). Daerah nilai yang dicakup kuantisasi ini harus cukup lebar untuk bisa mencakup rentang dinamis (*dynamic range*) dari sinyal, yang didefinisikan sebagai (max $x(n)$ – min $x(n)$). Dalam contoh di atas bisa dilihat max $x(n)$ = 4.0 sedangkan min $x(n)$ = 0.14, sehingga rentang dinamisnya adalah 3.86.

Beberapa sifat dari kuantisasi adalah:

- Apabila step kuantisasi ini membesar, maka jumlah level kuantisasi yang dibutuhkan untuk mencakup rentang dinamis sinyal menjadi berkurang, sehingga jumlah bit yang diperlukan dapat dihemat. Tapi akibatnya $\left|e_q(n)\right|$ rata-rata membesar.
- Sebaliknya, apabila step kuantisasi mengecil, maka $\left|e_q(n)\right|$ rata-rata membaik (mengecil). Namun akibatnya jumlah jumlah level kuantisasi yang dibutuhkan untuk mencakup rentang dinamis sinyal menjadi membesar, sehingga jumlah bit yang diperlukan menjadi boros.

Dalam praktek seringkali lebih penting untuk memperkecil kesalahan relatif daripada kesalahan absolut. Untuk itu, dikenal besaran energi dari sinyal maupun kesalahan, yang didefinisikan masing-masing sebagai

$$E_x = \sum_n \left|x(n)\right|^2 \text{ dan } E_e = \sum_n \left|e_q(n)\right|^2$$

Misalnya sinyal $x_1(n)$ yang memiliki enersi $E_{x1} = 10$ dikuantisasi dengan enersi kesalahan $E_{e1} = 0.2$. Sementara itu sinyal $x_2(n)$ yang memiliki enersi $E_{x2} = 1$ dikuantisasi dengan enersi kesalahan $E_{e2} = 0.1$. Sekilas sinyal $x_1(n)$ mengalami kerugian lebih besar daripada $x_2(n)$ akibat $E_{e1} > E_{e2}$. Namun dalam situasi praktis impak negatif yang dialami $x_2(n)$ sebenarnya lebih besar daripada yang dialami $x_1(n)$, karena E_{e2} adalah 10% dari E_{x2}, sedangkan E_{e1} hanyalah 2% dari E_{x1}.

Oleh sebab itu, besaran yang sering dipakai untuk melihat kualitas kuantisasi adalah adalah signal-to-noise ratio (SNR), yang didefinisikan (dalam dB) sebagai

$$\text{SNR} = 10\log\frac{E_x}{E_e}$$

Jelaslah bahwa kita perlu mencari jumlah bit b yang optimal, artinya jumlah bit terkecil yang bisa mencapai SNR yang dinginkan. Untuk jumlah bit yang tetap, SNR yang terbaik akan diperoleh apabila rentang kuantisasi secara efektif mencakup rentang dinamis. Untuk sinyal yang nilainya terdistribusi secara uniform, ini berarti rentang kuantisasi sama dengan rentang dinamis.

Contoh 7:

Sinyal $x(n) = 6.35\cos\left(\frac{p}{10}n\right)$ hendak dikuantisasi. Berapa banyak bit per sampel yang diperlukan apabila

a) $\Delta = 0.1$

b) $\Delta = 0.02$

Jawab:

Rentang dinamis dari sinyal ini adalah 6.35 – (–6.35) = 12.7. Asumsi jumlah level adalah L.

a) L – 1= 12.7 / 0.1 = 127. $L = 128 = 2^b$, maka b = 7.

b) L – 1= 12.7 / 0.02 = 635. $L = 636 = 2^b$, maka b = 10 (bilangan integer).

Contoh 8:

Sebuah sinyal seismik memiliki rentang dinamis 1 volt dan disampel dengan sebuah ADC 8 bit yang memiliki F_s = 20 Hz.

a) Tentukan bit rate dan resolusi ?

b) Frekuensi maksimum yang bisa direpresentasikan pada sinyal digitalnya.

Jawab:

a) Satu sampel menggunakan 8 bit. Ada 20 sampel tiap detik. Maka bit rate = 160 bit per detik. Jumlah level L = 256. Jadi resolusi = 1 / (256 – 1) = 0.0039 volt.

b) Kriteria Nyquist adalah 20 Hz. Jadi batas atas frekuensi yang bisa direpresentasikan adalah 10 Hz (eksklusif).

7 Catatan Penutup

Pada bab ini, kita sudah melihat secara singkat sistem pemrosesan sinyal digital. Bab ini telah menjelaskan beberapa konsep dasar seperti definisi, konsep frekuensi, konsep sinyal terhubung secara harmonis, dan perubahan antara domain analog dan domain digital, terutama melalui penjelasan tentang sampling dan ADC. Bagian DAC tidak dijelaskan secara lengkap dan baru akan di bahas di bagian akhir dari diktat ini.

Bab berikutnya akan berisi teori pemrosesan sinyal. Teori akan dikembangkan pada $x(n)$ bukan $x_q(n)$ karena *tools* matematika yang tersedia lebih lengkap dan untuk menghindari penjelasan yang rumit.